1a De gemiddelde snelheid (waarmee $T$ verandert) op [10, 20] is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(20)-T(10)}{20-10} = \frac{34-50}{10} = \frac{-16}{10} = -1{,}6$ (°C/minuut).
De gemiddelde snelheid op [20, 30] is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(30)-T(20)}{30-20} = \frac{26-34}{10} = \frac{-8}{10} = -0{,}8$ (°C/minuut).

1b De snelheid (waarmee $T$ verandert) op $t = 5$ is (neem hiervoor de gemiddelde snelheid op [0, 10]) $\frac{dT}{dt} \approx -4$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 5$ is (neem hiervoor de gemiddelde temperatuur op [0, 10]) $T \approx \frac{T(0)+T(10)}{2} = \frac{90+50}{2} = 70$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-20)$ geeft dan $-4 \approx c(70-20) \Rightarrow -4 \approx c \cdot 50 \Rightarrow c \approx \frac{-4}{50} = \frac{-8}{100} = -0{,}08$.

1c De snelheid (waarmee $T$ verandert) op $t = 15$ is (de gemiddelde snelheid op [10, 20] uit opgave 1a) $\frac{dT}{dt} \approx -1{,}6$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 15$ is (de gemiddelde temperatuur op [10, 20]) $T \approx \frac{T(10)+T(20)}{2} = \frac{50+34}{2} = 42$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-20)$ geeft dan $-1{,}6 \approx c(42-20) \Rightarrow -1{,}6 \approx c \cdot 22 \Rightarrow c \approx \frac{-1{,}6}{22} \approx -0{,}073$.

```
-1.6/22
      -.0727272727
```

De snelheid (waarmee $T$ verandert) op $t = 25$ is (de gemiddelde snelheid op [20, 30] uit opgave 1a) $\frac{dT}{dt} \approx -0{,}8$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 25$ is (de gemiddelde temperatuur op [20, 30]) $T \approx \frac{T(20)+T(30)}{2} = \frac{34+26}{2} = 30$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-20)$ geeft dan $-0{,}8 \approx c(30-20) \Rightarrow -0{,}8 \approx c \cdot 10 \Rightarrow c \approx \frac{-0{,}8}{10} = -0{,}08$.

1d (De gemiddelde) $c = \frac{-0{,}08 + -0{,}72727... + -0{,}08}{3} = 0{,}07757...$ geeft $\frac{dT}{dt} \approx 0{,}078(T-20) \approx 0{,}078T + 1{,}55$.

```
-1.6/22
      -.0727272727
(-0.08+Ans+-0.08
)/3
      -.0775757576
Ans*-20
       1.551515152
```

2a Als je een andere tijdseenheid neemt dan ziet het dynamisch model er anders uit.

2b 5 seconden ofwel $\frac{1}{12} \cdot 60$ seconden is $\frac{1}{12}$ minuut en 10 seconden ofwel $\frac{1}{6} \cdot 60$ seconden is $\frac{1}{6}$ minuut.
$\frac{dT}{dt}$ op $t = \frac{1}{12}$ (min) is (neem de gemiddelde snelheid op [0, $\frac{1}{6}$]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(\frac{1}{6})-T(0)}{\frac{1}{6}} = \frac{194-200}{\frac{1}{6}} = \frac{-6}{\frac{1}{6}} = -6 \cdot \frac{6}{1} = -36$ (°C/minuut).
Temperatuur $T$ op $t = \frac{1}{12}$ (min) is (neem de gemiddelde temperatuur op [0, $\frac{1}{6}$]) $T \approx \frac{T(0)+T(\frac{1}{6})}{2} = \frac{200+194}{2} = 197$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-15)$ geeft dan $-36 \approx c(197-15) \Rightarrow -36 \approx c \cdot 182 \Rightarrow c \approx \frac{-36}{182} \approx -0{,}198$ (met $T$ in °C en $t$ in min.).

```
-36/182
      -.1978021978
```

3a $\frac{dT}{dt}$ op $t = 5$ is (neem de gemiddelde snelheid op [0, 10]) $\frac{dT}{dt} = \frac{T(10)-T(0)}{10-0} = \frac{94-100}{10} = \frac{-6}{10} = -0{,}6$ (°C/seconde).
De temperatuur $T$ op $t = 5$ is (neem de gemiddelde temperatuur op [0, 10]) $T = \frac{T(0)+T(10)}{2} = \frac{100+94}{2} = 97$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-12)$ geeft dan $-0{,}6 = c(97-12) \Rightarrow -0{,}6 = c \cdot 85 \Rightarrow c = \frac{-0{,}6}{85} \approx -0{,}007$.

```
-0.6/85
      -.0070588235
```

3b $\frac{dT}{dt}$ op $t = \frac{1}{12}$ (min) is (neem de gemiddelde snelheid op [0, $\frac{1}{6}$]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(\frac{1}{6})-T(0)}{\frac{1}{6}} = \frac{94-100}{\frac{1}{6}} = \frac{-6}{\frac{1}{6}} = -36$ (°C/minuut).
Temperatuur $T$ op $t = \frac{1}{12}$ (min) is (neem de gemiddelde temperatuur op [0, $\frac{1}{6}$]) $T \approx \frac{T(0)+T(\frac{1}{6})}{2} = \frac{100+94}{2} = 97$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-12)$ geeft dan $-36 \approx c(97-12) \Rightarrow -36 \approx c \cdot 85 \Rightarrow c \approx \frac{-36}{85} \approx -0{,}424$.

```
-36/85
      -.4235294118
```

4a $\frac{dT}{dt}$ op $t = 2\frac{1}{2}$ is (neem de gemiddelde snelheid op [0, 5]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(5)-T(0)}{5-0} = \frac{9{,}8-7}{5} = \frac{2{,}8}{5} = \frac{5{,}6}{10} = 0{,}56$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 2\frac{1}{2}$ is (neem de gemiddelde temperatuur op [0, 5]) $T \approx \frac{T(0)+T(5)}{2} = \frac{7+9{,}8}{2} = 8{,}4$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-21)$ geeft dan $0{,}56 \approx c(8{,}4-21) \Rightarrow 0{,}56 \approx c \cdot -12{,}6 \Rightarrow c \approx \frac{0{,}56}{-12{,}6} \approx -0{,}044$.

```
0.56/-12.6
      -.0444444444
```

4b $\frac{dT}{dt}$ op $t = 7\frac{1}{2}$ is (neem de gemiddelde snelheid op [5, 10]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(10)-T(5)}{10-5} = \frac{12{,}1-9{,}8}{5} = \frac{2{,}3}{5} = \frac{4{,}6}{10} = 0{,}46$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 7\frac{1}{2}$ is (neem de gemiddelde temperatuur op [5, 10]) $T \approx \frac{T(5)+T(10)}{2} = \frac{9{,}8+12{,}1}{2} = 10{,}95$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-21)$ met $0{,}46 \approx c(10{,}95-21) \Rightarrow 0{,}46 \approx c \cdot -10{,}05 \Rightarrow c \approx \frac{0{,}46}{-10{,}05} \approx -0{,}046$.

```
0.46/-10.05
      -.0457711443
```

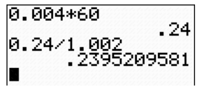
$\frac{dT}{dt}$ op $t = 25$ is (neem de gemiddelde snelheid op [20, 30]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(30)-T(20)}{30-20} = \frac{17{,}4-15{,}3}{10} = \frac{2{,}1}{10} = 0{,}21$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 25$ is (neem de gemiddelde temperatuur op [20, 30]) $T \approx \frac{T(20)+T(30)}{2} = \frac{15{,}3+17{,}4}{2} = 16{,}35$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-21)$ met $0{,}42 \approx c(16{,}35-21) \Rightarrow 0{,}21 \approx c \cdot -4{,}65 \approx\Rightarrow c \approx \frac{0{,}21}{-4{,}65} \approx -0{,}045$

```
0.21/-4.65
      -.0451612903
```

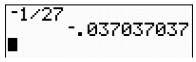
$\frac{dT}{dt}$ op $t = 45$ is (neem de gemiddelde snelheid op [30, 60]) $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(60)-T(30)}{60-30} = \frac{20{,}1-17{,}4}{30} = \frac{2{,}7}{30} = \frac{0{,}9}{10} = 0{,}09$ (°C/minuut).
De temperatuur $T$ op $t = 45$ is (neem de gemiddelde temperatuur op [30, 60]) $T \approx \frac{T(30)+T(60)}{2} = \frac{17{,}4+20{,}1}{2} = 18{,}75$ (°C).
$\frac{dT}{dt} = c(T-21)$ met $0{,}09 \approx c(18{,}75-21) \Rightarrow 0{,}09 \approx c \cdot -2{,}25 \Rightarrow c \approx \frac{0{,}09}{-2{,}25} = -0{,}04$.

```
0.09/-2.25
      -.04
```

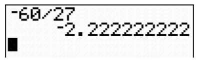
5 $\frac{dN}{dt}$ (de snelheid waarmee het aantal bacteriën verandert) is evenredig met (het aantal bacteriën) $N$ betekent: $\frac{dN}{dt} = c \cdot N$.
$\frac{dN}{dt}$ op $t = \frac{1}{120}$ (uur) is (neem gemiddelde aantal op $[0, \frac{1}{60}]$) $\frac{dN}{dt} \approx \frac{1{,}004 \cdot 10^9 - 10^9}{\frac{1}{60} - 0} = 0{,}004 \cdot 10^9 \cdot 60 = 0{,}24 \cdot 10^9$ (bact./uur).
Aantal bacteriën $N$ op $t = \frac{1}{120}$ (uur) is (neem het gemiddelde aantal op $[0, \frac{1}{60}]$) $N \approx \frac{10^9 + 1{,}004 \cdot 10^9}{2} = 1{,}002 \cdot 10^9$ (bact.).
$\frac{dN}{dt} = c \cdot N$ geeft dan $0{,}24 \cdot 10^9 \approx c \cdot 1{,}002 \cdot 10^9 \Rightarrow c \approx \frac{0{,}24 \cdot 10^9}{1{,}002 \cdot 10^9} \approx 0{,}24$. ($N$ het aantal bacteriën en $t$ in uur)



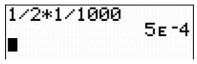

6a $\frac{dv}{dt}$ (de snelheid waarmee de snelheid verandert = de versnelling $a$) is evenredig met (de snelheid) $v$ betekent: $\frac{dv}{dt} = c \cdot v$.
$\frac{dv}{dt}$ op $t = 13$ (sec) is (neem gemiddelde versnelling op [10, 16]) $\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(16) - v(10)}{16 - 10} = \frac{24 - 30}{6} = \frac{-6}{6} = -1$ (m/s$^2$).
De snelheid $v$ op $t = 13$ (sec) is (neem de gemiddelde snelheid op [10, 16]) $v \approx \frac{v(10) + v(16)}{2} = \frac{30 + 24}{2} = 27$ (m/s).
$\frac{dv}{dt} = c \cdot v$ geeft dan $-1 \approx c \cdot 27 \Rightarrow c \approx \frac{-1}{27} \approx -0{,}037$. ($v$ de snelheid in m/s en $t$ in seconden)




6b $\frac{dv}{dt}$ op $t = \frac{13}{60}$ (min.) is (neem gemiddelde versnelling op $[\frac{10}{60}, \frac{16}{60}]$) $\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(\frac{16}{60}) - v(\frac{10}{60})}{\frac{16}{60} - \frac{10}{60}} = \frac{24 - 30}{\frac{6}{60}} = \frac{-6}{\frac{1}{10}} = -6 \cdot \frac{10}{1} = -60$ (m/s/minuut).
De snelheid $v$ op $t = \frac{13}{60}$ (min.) is (neem de gemiddelde snelheid op $[\frac{10}{60}, \frac{16}{60}]$) $v \approx \frac{v(\frac{10}{60}) + v(\frac{16}{60})}{2} = \frac{30 + 24}{2} = 27$ (m/s).
$\frac{dv}{dt} = c \cdot v$ geeft dan $-60 \approx c \cdot 27 \Rightarrow c \approx \frac{-60}{27} \approx -2{,}22$. ($v$ de snelheid in m/s en $t$ in minuten)

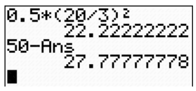



7 Per seconde komt er $\frac{1}{2}$ liter oplossing in met $\frac{1}{2}$ gram zout en gaat er $\frac{1}{2}$ liter oplossing weg met $\frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{1000}$ gram zout.
De snelheid (waarmee de hoeveelheid $Z$ verandert per seconde) is $\frac{dZ}{dt} = 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{1000}$ of $\frac{dZ}{dt} = 0{,}5 - 0{,}0005Z$ (gram/s).
Het dynamisch model is $\frac{dZ}{dt} = 0{,}5 - 0{,}0005Z$ (gram/seconde) met $Z(0) = 5\,000$ (gram).




8a Op de topsnelheid van 36 $\frac{\text{km}}{\text{uur}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ is $F_V = F_W = 50$ N. Dit geeft $50 = c \cdot 10^2 \Rightarrow c = \frac{50}{100} = 0{,}5$.

8b De snelheid van 24 $\frac{\text{km}}{\text{uur}} = \frac{24}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = \frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ is $F_W = 0{,}5 \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 \approx 22{,}2$ N.
Dit geeft $F_R = F_V - F_W \approx 50 - 22{,}2 = 27{,}8$ N.

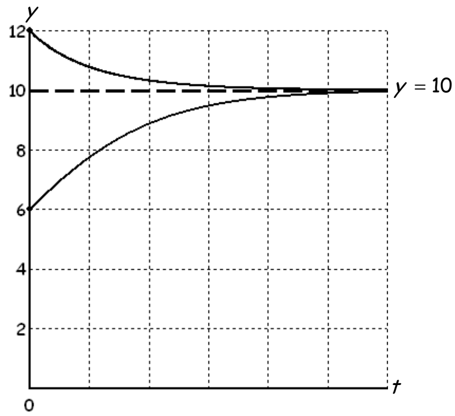



8c $\left.\begin{array}{l} F = F_R \approx 27{,}8 \text{ N} \\ F = m \cdot a = 100a \end{array}\right\} \Rightarrow 100a \approx 27{,}8 \Rightarrow a \approx 0{,}278$ (m/s$^2$).

8d $\left.\begin{array}{l} F = m \cdot a = 100a \\ F = F_R = F_V - F_W = 50 - 0{,}5v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 100a = 50 - 0{,}5v^2 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{50 - 0{,}5v^2}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{200}v^2$.

9 De grenswaarde wordt bereikt als $F_R = 0 \Rightarrow F_{motor} - F_W \Rightarrow 120 = 10v^2 \Rightarrow v^2 = 12 \Rightarrow v = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ (m/s).

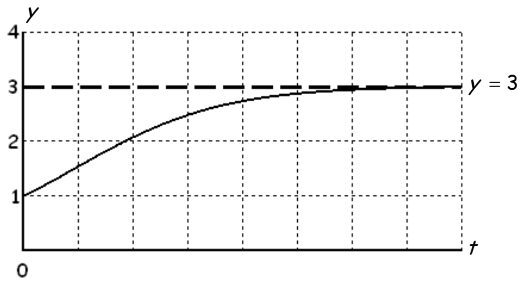
10a $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $5y(10 - y) = 0$
$5y = 0 \vee 10 - y = 0$
$y = 0 \vee y = 10$.
De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 0$ en $y = 10$.
$\frac{dy}{dt} = 5y(10 - y) > 0$ voor $0 < y < 10$, dus de grafiek van $y(t)$ met $y(0) = 6$ is stijgend. (zie een schets hiernaast)

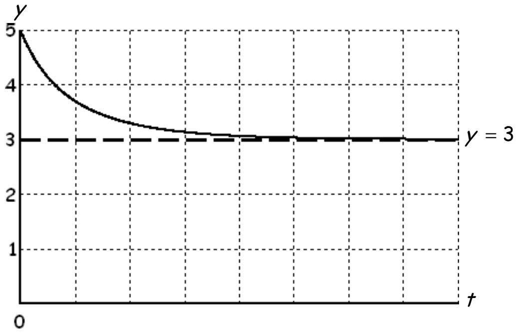



10b $\frac{dy}{dt} = 5y(10 - y) < 0$ voor $y > 10$, dus de grafiek van $y(t)$ met $y(0) = 12$ is dalend. (zie een schets hiernaast)

10c $\frac{dy}{dt} = 5y(10 - y) < 0$ voor $y < 0$ en $y > 10$, dus voor $y(0) < 0$ en $y(0) > 10$ is de grafiek van $y(t)$ dalend.

11a $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $3y - y^2 = 0$
$y(3 - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 3$.
De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 0$ en $y = 3$.
$\frac{dy}{dt} = y(3 - y) > 0$ voor $0 < y < 3$, dus de grafiek van $y(t)$ met $y(0) = 1$ is stijgend. (zie een schets hiernaast)





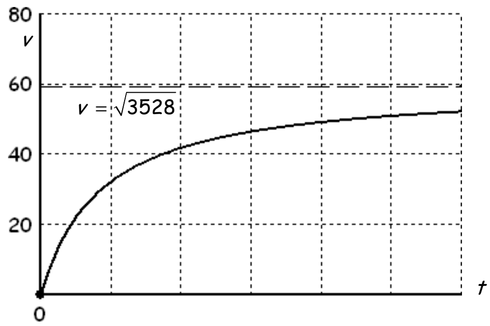

11b $\frac{dy}{dt} = y(3-y) < 0$ voor $y > 3$, dus de grafiek van $y(t)$
met $y(0) = 5$ is dalend. (zie een schets hiernaast)

11c $\frac{dy}{dt} = y(3-y) < 0$ voor $y < 0$ en $y > 3$, dus
voor $y(0) < 0$ en $y(0) > 3$ is de grafiek van $y(t)$ dalend.

11d $\frac{dy}{dt} = y(3-y) = 0$ voor $y = 0$ en $y = 3$, dus
voor $y(0) = 0$ en $y(0) = 3$ is de grafiek van $y(t)$ een rechte lijn.

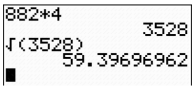
12a De resulterende kracht $F_R = F_Z - F_W = 882 - \frac{1}{4}v^2$.

Ook is $F_R = F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{882 - \frac{1}{4}v^2}{90}$ ($v$ in m/s en $t$ in seconden).




12b $\frac{dv}{dt} = \frac{882 - \frac{1}{4}v^2}{90} = 0$ (teller = 0)

$882 = \frac{1}{4}v^2$



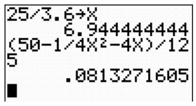

$v^2 = 3528$

$v = \sqrt{3528} \approx 59{,}4$ (de horizontale asymptoot).

$v(0) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{882 - 0}{90} > 0$, dus
de grafiek van $v(t)$ met $v(0) = 0$ is stijgend. (zie een schets hiernaast)

13a De resulterende kracht $F_R = F_{motor} - F_L - F_W = 50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v$.

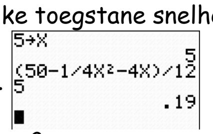
$F_R = F = m \cdot a \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m} = \frac{50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v}{125}$ ($v$ in m/s en $t$ in seconden).



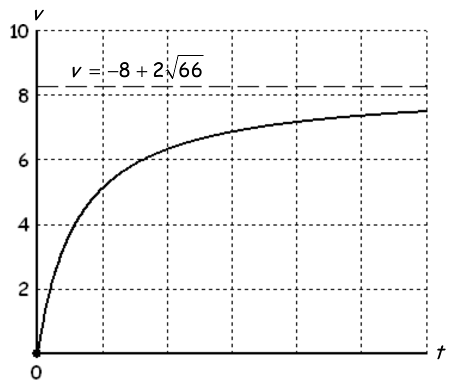

13b $\left[\frac{dv}{dt}\right]_{v=\frac{25}{3,6}} = \left[\frac{50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v}{125}\right]_{v=\frac{25}{3,6}} \approx 0{,}081 > 0 \Rightarrow$ de grafiek van $v(t)$ stijgt nog.

Dus de snorfietser kan harder dan de wettelijke toegstane snelheid van 25 km/uur.

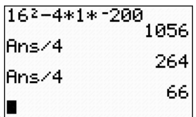
13c $a(5) = \left[\frac{dv}{dt}\right]_{v=5} = \left[\frac{50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v}{125}\right]_{v=5} = 0{,}19$ m/s$^2$.




De versnelling $a = \frac{dv}{dt}$ van de snorfiet is 0,19 m/s$^2$ als $v = 5$ m/s.



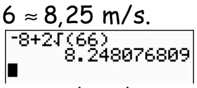

13d $\frac{dv}{dt} = \frac{50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v}{125} = 0$ (teller = 0)




$50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v = 0$ (keer $-4$)

$v^2 + 16v - 200 = 0$ met $D = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot -200 = 256 + 800 = 1056$

$\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $v = \frac{-16 + \sqrt{1056}}{2} = \frac{-16 + 4\sqrt{66}}{2} = -8 + 2\sqrt{66} \approx 8{,}25$ m/s.

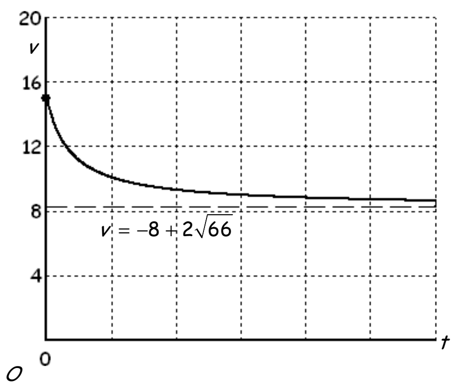



$\frac{dv}{dt} > 0$ voor $v < -8 + 2\sqrt{66}$.

Dus de grafiek van $v(t)$ met $v(0) = 0$ is stijgend. (zie een schets hiernaast)

13e $\frac{dv}{dt} < 0$ voor $v > -8 + 2\sqrt{66}$.

Dus de grafiek van $v(t)$ met $v(0) = 15$ is dalend. (zie een schets hiernaast)

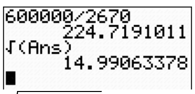



14a De resulterende kracht $F_R = F_{motor} - F_W = 600\,000 - 2\,670v^2$.

$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{600\,000 - 2\,670v^2}{3\,500\,000}$ ($v$ in m/s en $t$ in seconden).

14b $\frac{dv}{dt} = \frac{600\,000 - 2\,670v^2}{3\,500\,000} = 0$ (teller = 0)

$600\,000 - 2\,670v^2 = 0$




$v^2 = \frac{600\,000}{2\,670} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{600\,000}{2\,670}}$.

De formule van de asymptoot is $v = \sqrt{\frac{600\,000}{2\,670}} \approx 15{,}0$ (m/s).

14c De resulterende kracht $F_R = -F_{motor} - F_W = -600\,000 - 2\,670v^2$.

$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-600\,000 - 2\,670v^2}{3\,500\,000}$ ($v$ in m/s en $t$ in seconden).

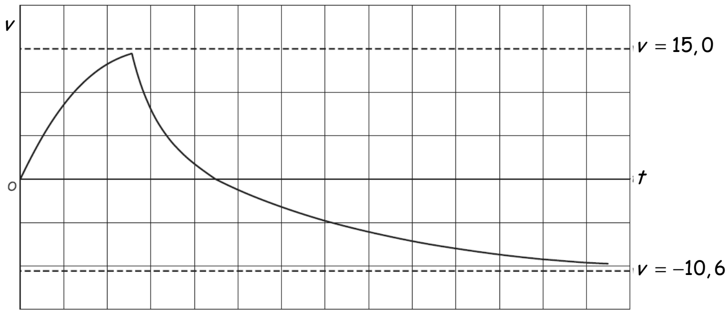
14d De resulterende kracht $F_R = -F_{motor} + F_W = -600\,000 + 2 \cdot 2\,670v^2 = -600\,000 + 5\,340v^2$.
$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-600\,000 + 5\,340v^2}{3\,500\,000}$ ($v$ in m/s en $t$ in seconden).

14e Bij vooruit varen is de formule van de asymptoot $v = \sqrt{\frac{600000}{2670}} \approx 15,0$. (zie de berekening bij 14b)
Bij afremmen neemt de snelheid af tot 0 m/s, daarna vaart het schip met een toenenemde snelheid achteruit, waarbij de snelheid op een bepaald moment een grenswaarde bereikt.
Bij achteruit varen geldt $v < 0$ en
$\frac{dv}{dt} = \frac{-600\,000 + 5\,340v^2}{3\,500\,000} = 0$ geeft $600\,000 - 5\,340v^2 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{600\,000}{5\,340}$.
De formule van de asymptoot is $v = -\sqrt{\frac{600\,000}{5\,340}} \approx -10,6$ (m/s).

```
-√(600000/5340)
      -10.5999788
```

Bij vooruit varen geldt $a = \frac{dv}{dt} > 0$ voor $0 < v < 15,0 \Rightarrow$ de grafiek van $v(t)$ met $v(0) = 0$ is stijgend.

Bij afremmen geldt
$a = \frac{dv}{dt} < 0$ voor $v \geq 0 \Rightarrow$
dus de grafiek van $v(t)$
is dalend totdat $v(0) = 0$.
Bij achteruit varen geldt
$a = \frac{dv}{dt} < 0$ voor $-16,0 < v < 0 \Rightarrow$
de grafiek van $v(t)$ is ook dalend
vanaf het moment dat het fregat
achteruit begint te varen. (zie schets hiernaast)

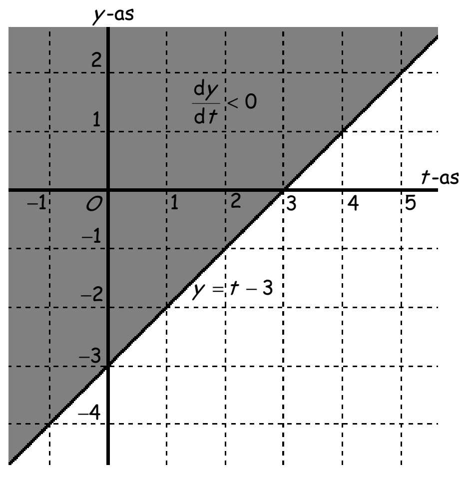



15a $H = 300$ (gegeven) én $\frac{dH}{dt} = 0$ (maximum) geeft
$a \cdot 300\left(1 - \frac{300}{b}\right) = 0$
$300a = 0 \vee 1 - \frac{300}{b} = 0$
$a = 0 \vee 1 = \frac{300}{b}$
$a = 0 \vee b = 300$.
$a = 0$ voldoet niet, want dan $\frac{dH}{dt} = 0$ voor elke $H$
en zullen de zonnebloemen nooit groeien.
Dus $a \neq 0$ én $b = 300$.
$a < 0$ voldoet niet, want dan $\frac{dH}{dt} < 0$ voor elke $H$ en
groeien de zonnebloemen niet, maar worden korter.
Dus voor $a > 0$ én $b = 300$ geldt dat
de maximale hoogte van de zonnebloemen 300 cm is.

15b $H = 10$ én $\frac{dH}{dt} = 0,5 \Rightarrow a \cdot 10\left(1 - \frac{10}{b}\right) = 0,5$.
$H = 50$ én $\frac{dH}{dt} = 3 \Rightarrow a \cdot 50\left(1 - \frac{50}{b}\right) = 3$.
$$\begin{cases} 10a - \frac{100a}{b} = 0,5 & \times 25 \\ 50a - \frac{2500a}{b} = 3 & \times 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 250a - \frac{2500a}{b} = 12,5 \\ 50a - \frac{2500a}{b} = 3 \end{cases}$$
$$200a = 9,5 \Rightarrow$$
$\boxed{a = 0,0475}$ invullen in $10a - \frac{100a}{b} = 0,5$ geeft dan
$0,475 - \frac{4,75}{b} = 0,5$
$-\frac{4,75}{b} = 0,025$
$b = -\frac{4,75}{0,025}$
$\boxed{b = -190}$

```
9.5/200
             .0475
-4.75/0.025
              -190
```

16a $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(0,2)} = \left[-y + t - 3\right]_{(t,y)=(0,2)} = -2 + 0 - 3 = -5$.
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(4,1)} = \left[-y + t - 3\right]_{(t,y)=(4,1)} = -1 + 4 - 3 = 0$.
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(-2,2)} = \left[-y + t - 3\right]_{(t,y)=(-2,2)} = -2 + -2 - 3 = -7$.
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(4,-1)} = \left[-y + t - 3\right]_{(t,y)=(4,-1)} = --1 + 4 - 3 = 2$.




16b $\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow -y + t - 3 = 0 \Rightarrow y = t - 3$ (lijn door $(0,-3)$ en $(3,0)$).

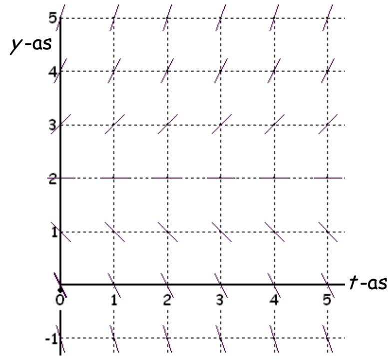
16c In $(0, 0)$ (boven de lijn $y = t - 3$) geldt $\frac{dy}{dt} = -0 + 0 - 3 = -3 < 0$.
Dus voor alle punten in het halfvlak waarin $(0, 0)$ ligt geldt $\frac{dy}{dt} < 0$.

17a $\frac{dy}{dt} = y - 2$ hangt alleen van $y$ af.
Bijvoorbeeld: $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=-1} = \left[y - 2\right]_{y=-1} = -1 - 2 = -3$;
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=0} = \left[y - 2\right]_{y=0} = 0 - 2 = -2$ enz.

| $y$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dt}$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Zie de tabel hierboven.
(het lijnelementenveld vind je op het volgend blad)

Lijnelementenveld van opg. 17a

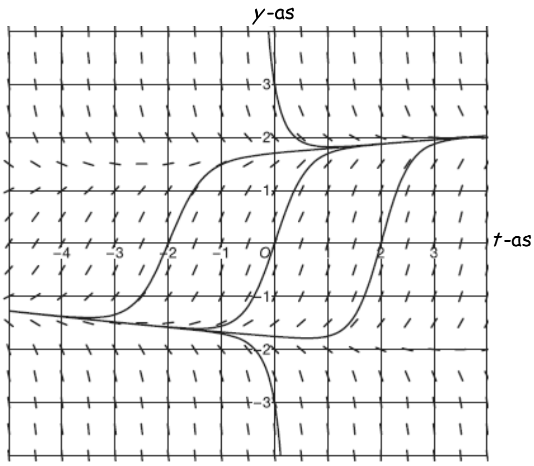



17b $l$: $y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(-3,2)} = \left[y-2\right]_{y=2} = 2 - 2 = 0.$
Dus $l$: $y = b$ door $(-3, 2) \Rightarrow 2 = b$. Dit geeft de lijn $l$: $y = 2$.

17c $rc_{raaklijn} = 3 \Rightarrow \left[\frac{dy}{dt}\right]_A = \left[y-2\right]_A = 3 \Rightarrow y - 2 = 3 \Rightarrow y = y_A = 5.$
$A(t, 5)$ op $5 = 3t - 7 \Rightarrow 12 = 3t \Rightarrow t = t_A = 4$. Dus het raakpunt is $A(4, 5)$.

18
- $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $y = 0$ (en voor $y = 4$) $\Rightarrow$ I valt af.
- $\frac{dy}{dt} < 0$ voor $0 < y < 4 \Rightarrow$ II en IV vallen af.

Dus het lijnelementenveld hoort bij III.

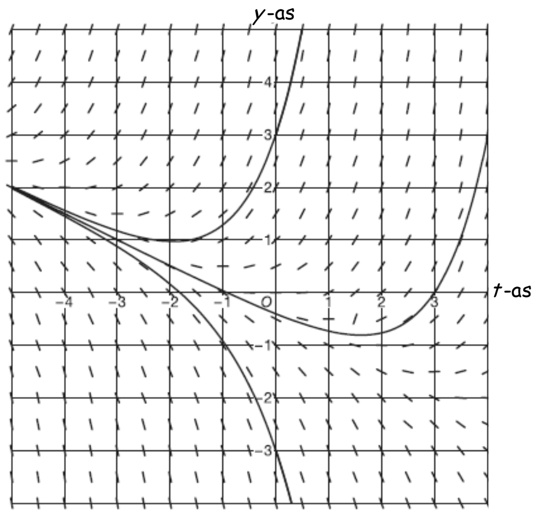



19a Zie de krommen in het lijnelementenveld hiernaast.

19b $rc_{raaklijn} = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3}{10}t - y^2 + 3 = 3 \Rightarrow \frac{3}{10}t - y^2 = 0.$
$A$ ook op $y = 3t \Rightarrow \frac{3}{10}t - 9t^2 = 0 \Rightarrow 3t(\frac{1}{10} - 3t) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{30}.$
$t = 0$ geeft $y = 3 \cdot 0 = 0$ met raakpunt is $A(0, 0)$ en
$t = \frac{1}{30}$ geeft $y = 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$ met raakpunt is $A(\frac{1}{30}, \frac{1}{10})$.

19c $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $t = 4$ geeft
$\frac{3}{10} \cdot 4 - y^2 + 3 = 0 \Rightarrow \frac{12}{10} - y^2 + 3 = 0 \Rightarrow \frac{42}{10} = y^2 = \frac{21}{5}.$
Dus $y = \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{21 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{105} \vee y = -\sqrt{\frac{21}{5}} = -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{105}.$

19d $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $\frac{3}{10}t - y^2 + 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}t + 3 = y^2.$
De kromme met vergelijking $y^2 = \frac{3}{10}t + 3$ gaat
door de toppen van de oplossingskrommen.




20a Zie de krommen in het lijnelementenveld hiernaast.

20b De scheve asymptoot is de lijn $y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$.
(de lijnelementen op deze lijn hebben de richting van deze lijn)

20c $rc_{raaklijn} = 2 \Rightarrow \left[\frac{dy}{dt}\right]_A = \left[\frac{1}{2}t + y\right]_A = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}t + y = 2.$
$A$ op $y = 2t + 7 \Rightarrow \frac{1}{2}t + 2t + 7 = 2 \Rightarrow 2\frac{1}{2}t = -5 \Rightarrow t = -2.$
$t = -2$ geeft $y = 2 \cdot -2 + 7 = 3$. Dus $A(-2, 3)$.

21 In de toppen is $\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y} = 0 \Rightarrow t + y = 0$ én $t - y \neq 0 \Rightarrow y = -t.$
Dit is ook te zien in het lijnelementenveld in figuur 15.7.
Dus $y = -t$. (is de lijn waar de toppen van de oplossingskrommen op liggen)

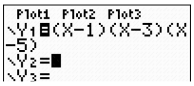
| | |
|---|---|
| 22a 💻 | 22c 💻 |
| 22b 💻 | 22d 💻 |

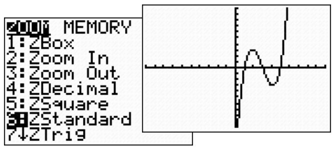
23a 💻
23b 💻
23c 💻

| | |
|---|---|
| 24a 💻 | 24c 💻 |
| 24b 💻 | 24d 💻 |

25a 💻
25b 💻
25c 💻

26a Voer $f(y) = (y-1)(y-3)(y-5)$ in op de GR.
Maak daarna een schets van de plot op de GR.
$f(y) = 0$ voor $y = 1$, $y = 3$ en $y = 5$.



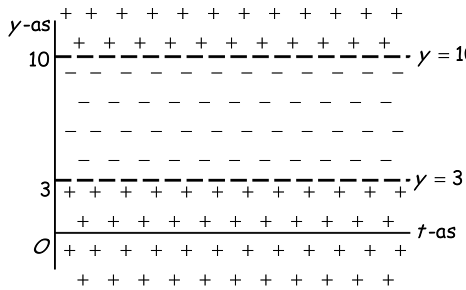

26b De grafiek van $\frac{dy}{dt} = f(y) = (\underbrace{y-1}_{\text{positief}}) \cdot (\underbrace{y-3}_{\text{negatief}}) \cdot (\underbrace{y-5}_{\text{negatief}})$ ligt boven de horizontale $y$-as voor $1 < y < 3$.

d.w.z.: voor elke waarde van $y$ met $1 < y < 3$ geldt $f(y) > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = f(y) > 0$ voor alle punten $(t, y)$ met $1 < y < 3$.

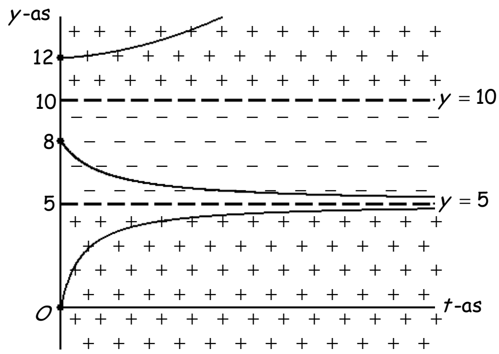
26c Aflezen uit de schets van 26a dat $\frac{dy}{dt} < 0$ voor $y < 1$ en voor $3 < y < 5$.

26d Voor (de lijn) $y = 3$ geldt zowel dat $\frac{dy}{dt} = 0$ als ook dat $(y-1)(y-3)(y-5) = 0$.
Dus (de lijn) $y = 3$ is een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking (dv) $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$.

27a $\frac{dy}{dt} = f_3(y) = (1 - \frac{y}{10}) \cdot (1 - \frac{y}{3}) = 0$
$1 - \frac{y}{10} = 0 \vee 1 - \frac{y}{3} = 0$
$1 = \frac{y}{10} \vee 1 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 10 \vee y = 3.$
Maak nu een tekenoverzicht van $f_3$. ($f_3(0) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$)
De lijn $y = 3$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $y(0) < 3 \vee 3 < y(0) < 10$.

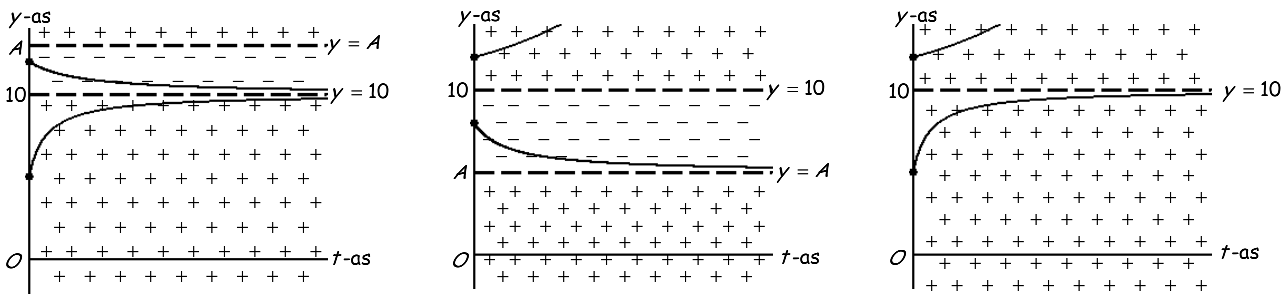



27b $y = 10$ voldoet aan $\frac{dy}{dt} = f(y) = (1 - \frac{y}{10}) \cdot (1 - \frac{y}{A}) = 0$
omdat $(1 - \frac{10}{10}) \cdot (1 - \frac{y}{A}) = 0 \cdot (1 - \frac{y}{A}) = 0$ voor elke $A$ ($A \neq 0$).
$y = 10$ is een horizontale lijn, dus niet stijgend.
Er zijn dus geen waarden van $A$ waarvoor alle oplossingskrommen stijgend zijn.




27c $\frac{dy}{dt} = f_5(y) = (1 - \frac{y}{10}) \cdot (1 - \frac{y}{5}) = 0$
$1 - \frac{y}{10} = 0 \vee 1 - \frac{y}{5} = 0 \Rightarrow y = 10 \vee y = 5.$
Maak nu een tekenoverzicht van $f_5$. ($f_5(0) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$)
De lijn $y = 5$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $y(0) = 0$ en $y(0) = 8$.

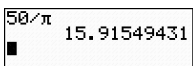
27d



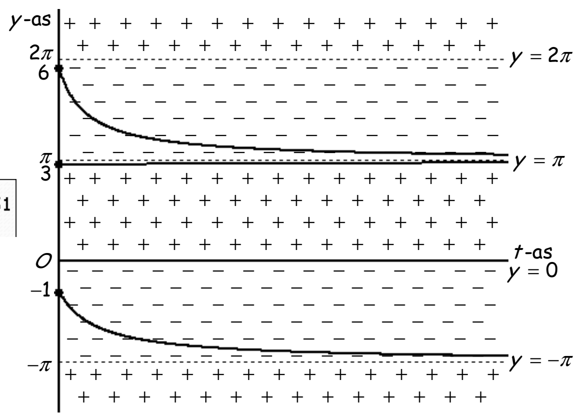

$A > 10 \Rightarrow y = 10$ is asymptoot   $A < 10 \Rightarrow y = 10$ is geen asymptoot   $A = 10 \Rightarrow y = 10$ is asymptoot
Dus $y = 10$ is geen asymptoot van de oplossingskrommen als $A < 10$.

28a $\frac{dy}{dt} = \sin(y) = 0 \Rightarrow y = 0 + k \cdot \pi \Rightarrow y = k \cdot \pi$ (zijn de asymptoten).
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=\frac{1}{2}\pi} = 1 > 0.$ Maak nu het tekenoverzicht hiernaast.
De drie oplossingskrommen zijn nu eenvoudig te schetsen.

28b $15\pi < 50 < 16\pi$ (zie het GR-scherm hiernaast).

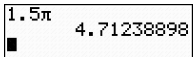



$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{15\pi < y < 16\pi} < 0.$ ($\Rightarrow$ minnen als voor $\pi < y < 2\pi$)
De oplossingskrommen met $y(0) = 50$ heeft dus de lijn $y = 15\pi$ als horizontale asymptoot.

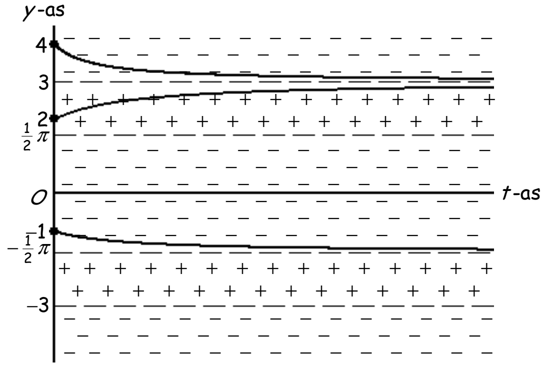



28c $l$: $y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(4,\, \frac{1}{6}\pi)} = \left[\sin(y)\right]_{y=\frac{1}{6}\pi} = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}.$
Dus $l$: $y = \frac{1}{2}t + b$ door $(4, \frac{1}{6}\pi) \Rightarrow \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} \cdot 4 + b \Rightarrow b = \frac{1}{6}\pi - 2.$

29a $\frac{dy}{dt} = (y^2-9)\cos(y) = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \vee \cos(y) = 0 \Rightarrow$
$y = -3 \vee y = 3 \vee y = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (de asymptoten).




$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=0} = -9 \cdot 1 < 0$ ( $\Rightarrow$ minnen in het tekenoverzicht hiernaast)
De drie oplossingskrommen zijn nu eenvoudig te schetsen.

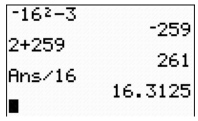



29b $k$: $y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(6,0)} = -9 \cdot \cos(0) = -9 \cdot 1 = -9.$
Dus $k$: $y = -9t + b$ door $(6,0) \Rightarrow 0 = -9 \cdot 6 + b \Rightarrow b = 54.$

29c Zie het tekenoverzicht hiernaast.
$y = -\frac{1}{2}\pi$ is asymptoot van de oplossingskromme voor $-3 < y(0) < -\frac{1}{2}\pi$ en voor $-\frac{1}{2}\pi < y(0) < \frac{1}{2}\pi.$

30a Het tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking moet bij $y(0) = 5$ uit plussen bestaan.
Dus $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(0,5)} = \left[f_p(y)\right]_{(0,5)} = \left[-y^2 + py - 3\right]_{y=5} = -5^2 + p \cdot 5 - 3 = -25 + 5p - 3 = -28 + 5p > 0 \Rightarrow 5p > 28 \Rightarrow p > \frac{28}{5}.$

30b $rc_k = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(6,16)} = \left[f_p(y)\right]_{(6,16)} = \left[-y^2 + py - 3\right]_{y=16} = -16^2 + p \cdot 16 - 3 = -259 + 16p = 2 \Rightarrow 16p = 261 \Rightarrow p = \frac{261}{16}.$




30c De grafiek van $f_p(y) = -y^2 + py - 3$ is een bergparabool (de coëfficiënt van $x^2$ is negatief).
Voor elke waarde van $p$ zijn er dus waarden van $y$ waarvoor de helling $\frac{dy}{dt} = f'_p(y) < 0.$
Er is dus geen waarde van $p$ waarvoor alle oplossingskrommen stijgend zijn.

31a $y = at + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a$ invullen in $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$ geeft
$a = 2(at + b) + t - 3$
$a = 2at + 2b + t - 3$
$a = 2at + t + 2b - 3$
$a = (2a + 1)t + 2b - 3.$

31b $a = (2a+1)t + 2b - 3$ voor elke $t$
$0 \cdot t + a = (2a+1)t + 2b - 3$
$0 = 2a + 1 \wedge a = 2b - 3$
$2a + 1 = 0 \wedge a + 3 = 2b$
$2a = -1 \wedge b = \frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}$
$a = -\frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}.$

31c $y = e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^{2t} \cdot 2 - \frac{1}{2}$ invullen in $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$ geeft
$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2(e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}) + t - 3$
$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2e^{2t} - t + 2\frac{1}{2} + t - 3$
$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2e^{2t} - \frac{1}{2}$. De substitutie levert een kloppende vergelijking op voor elke waarde van $t$.

32 Stel de oplossing van de dv. $y = at + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a$. Invullen in $\frac{dy}{dt} = t^2 - ty + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}$ geeft
$a = t^2 - t(at + b) + \frac{1}{4}(at + b)^2 - \frac{1}{4}$
$a = t^2 - at^2 - bt + \frac{1}{4}(a^2t^2 + 2abt + b^2) - \frac{1}{4}$
$a = t^2 - at^2 - bt + \frac{1}{4}a^2t^2 + \frac{1}{2}abt + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}$
$a = (1 - a + \frac{1}{4}a^2)t^2 + (-b + \frac{1}{2}ab)t + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}$ (waar voor elke $t \Rightarrow$ de coëfficiënten van $t^2$, van $t$ en de constanten zijn gelijk)
$1 - a + \frac{1}{4}a^2 = 0 \wedge -b + \frac{1}{2}ab = 0 \wedge \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4} = a$
$a^2 - 4a + 4 = 0 \wedge ab - 2b = 0 \wedge b^2 - 1 = 4a$
$(a-2)^2 = 0 \wedge b(a-2) = 0 \wedge b^2 = 4a + 1$
$a - 2 = 0 \wedge (b = 0 \vee a - 2 = 0) \wedge b^2 = 4a + 1$
$a = 2 \wedge b^2 = 9$
$a = 2 \wedge (b = -3 \vee b = 3)$. Dus de lineaire functies $y = 2t - 3$ en $y = 2t + 3$ zijn oplossingen van de dv.

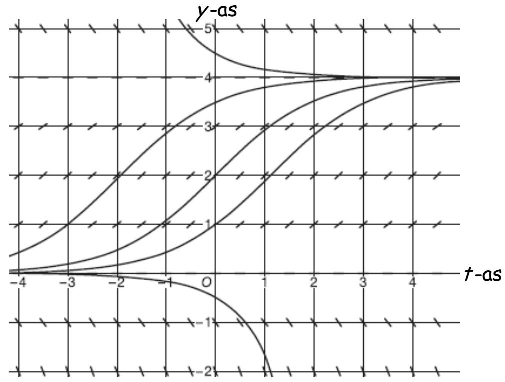
33 $y_1 = \frac{36}{t^2}$ $(t \neq 0) = 36 \cdot t^{-2} \Rightarrow \frac{dy_1}{dt} = 36 \cdot -2 \cdot t^{-3} = -\frac{72}{t^3}$. $y_1$ lijkt een oplossing van $D_3$ (ga dit daarom na met een controle).
Controle: $-\frac{72}{t^3} = \frac{-2 \cdot \frac{36}{t^2}}{t} \Rightarrow -\frac{72}{t^3} = \frac{-72}{t^3}$ klopt voor elke $t \neq 0$. Dus $y_1$ is een oplossing van $D_3$.
$y_2 = 3e^t + t^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy_2}{dt} = 3e^t + 2t$. $y_2$ lijkt een oplossing van $D_1$.
Controle: $3e^t + 2t = 3e^t + t^2 + 1 - t^2 + 2t - 1 \Rightarrow 3e^t + 2t = 3e^t + 2t$ klopt voor elke $t$. Dus $y_2$ is een oplossing van $D_1$.

$y_3 = -e^t - 1 \Rightarrow \frac{dy_3}{dt} = -e^t$. $y_3$ lijkt een oplossing van $D_2$.
Controle: $-e^t = -e^t - 1 + 1 \Rightarrow -e^t = -e^t$ klopt voor elke $t$. Dus $y_3$ is een oplossing van $D_2$.

34a Stel de oplossing $y = b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$.
Invullen in $\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2$ geeft $0 = b - \frac{1}{4}b^2$

$$0 = b \cdot (1 - \tfrac{1}{4}b)$$
$$b = 0 \vee 1 - \tfrac{1}{4}b = 0$$
$$b = 0 \vee \tfrac{1}{4}b = 1$$
$$b = 0 \vee b = 4.$$

De horizontale lijnen $y = 0$ en $y = 4$ zijn oplossing(skromm)en van de dv.




34b Zie de schets in het lijnelementenveld hiernaast.

34c $y(t) = \frac{4}{1+e^{-t}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{(1+e^{-t})\cdot 0 - 4\cdot e^{-t}\cdot -1}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. Controleren in de dv. $\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2$ geeft

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4}{1+e^{-t}} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{1+e^{-t}}\right)^2 = \frac{4}{1+e^{-t}} - \frac{4}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4(1+e^{-t})}{(1+e^{-t})^2} - \frac{4}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4+4e^{-t}-4}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$ (klopt voor elke $t$)

Het klopt voor elke waarde van $t \Rightarrow y(t) = \frac{4}{1+e^{-t}}$ is een oplossing van de dv.

35a Stel de oplossing $y = at + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a$.
Invullen in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y + 1$ geeft $a = \frac{1}{2}t + at + b + 1$
$a = (\frac{1}{2} + a)t + b + 1$ (moet kloppen voor elke $t$)

$\frac{1}{2} + a = 0 \wedge a = b + 1$
$a = -\frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2} = b + 1$
$a = -\frac{1}{2} \wedge b = -\frac{3}{2}. \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$ is een oplossing van de dv.

35b $y(t) = c\cdot e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = c\cdot e^t - \frac{1}{2}$. Invullen in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y + 1$ geeft
$c\cdot e^t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t + c\cdot e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} + 1$
$c\cdot e^t - \frac{1}{2} = c\cdot e^t - \frac{1}{2}$ (klopt voor elke $t$). Dus $y = c\cdot e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$ zijn oplossingen van de dv.

35c De $t$-as raken $\Rightarrow y = 0 \wedge \frac{dy}{dt} = 0$
$y = 0 \wedge \frac{1}{2}t + y + 1 = 0$
$y = 0 \wedge \frac{1}{2}t + 0 + 1 = 0$
$y = 0 \wedge t = -2$. (hiernaast verder)

$y = 0 \wedge t = -2$ invullen in $y = c\cdot e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$ geeft
$0 = c\cdot e^{-2} - \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 0 = c\cdot e^{-2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = c\cdot e^{-2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}e^2$.
De grafiek van $y = c\cdot e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$ raakt de $t$-as voor $c = \frac{1}{2}e^2$.

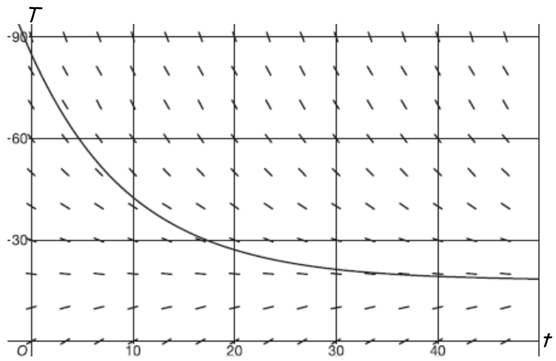
36a Het punt $(2, -1)$ lijkt het middelpunt van deze cirkels.

36b $(t-2)^2 + (y+1)^2 = 18$
$d\left((t-2)^2 + (y+1)^2\right) = d(18)$
$2(t-2)\cdot 1dt + 2(y+1)\cdot 1dy = 0$
$2(y+1)dy = -2(t-2)dt$
$\frac{dy}{dt} = \frac{-2(t-2)}{2(y+1)} = \frac{-(t-2)}{y+1} = \frac{2-t}{y+1}$ (de gegeven dv).
Dus de cirkel is oplossingskromme van de dv.

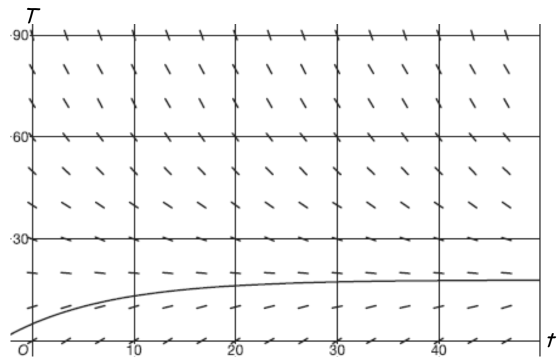
36c Cirkel met $M(2, -1)$: $(t-2)^2 + (y+1)^2 = r^2$.
Door $(0, 6) \Rightarrow (-2)^2 + (6+1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 49$
De cirkel: $(t-2)^2 + (y+1)^2 = 53$
$d\left((t-2)^2 + (y+1)^2\right) = d(53)$
$2(t-2)\cdot 1dt + 2(y+1)\cdot 1dy = 0$
$\frac{dy}{dt} = \frac{2-t}{y+1}$ (zie hiernaast).
Ook deze cirkel is oplossingskromme van de dv.

37a Als $T$ een dalende functie is, dan is $a$ groter dan de omgevingstemperatuur $\Rightarrow a > 18$.

37b




37d



37c $T = 18 + 67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \cdot -\frac{1}{10} = -\frac{67}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.
Invullen in de dv. $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{10}(T - 18)$ geeft
$-\frac{67}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}t} = -\frac{1}{10}(18 + 67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} - 18)$
$-\frac{67}{10} \cdot e^{-\frac{1}{10}t} = -\frac{1}{10}(67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t})$ klopt voor elke $t$.
Dus $T = 18 + 67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$ is een oplossing van de dv.
Verder is $T(0) = 18 + 67 \cdot e^{0} = 18 + 67 \cdot 1 = 85$ (klopt met 37b).
Dus $T = 18 + 67 \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$ is het dynamisch model van 37b.

37d Zie naast 37b.

37e De grenswaarde is $\Rightarrow p = 18$.
(bij grote waarden van $t$ is $T \approx p$)
Dus $T = 18 + q \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.
$T(0) = 5 \Rightarrow 5 = 18 + q \cdot e^{0}$
$-13 = q \cdot 1$.
Dus $p = 18$ en $q = -13$.

38a $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) = 3t$ (nu gewoon primitiveren) $\Rightarrow y(t) = 3 \cdot \frac{1}{2}t^2 + c = 1\frac{1}{2}t^2 + c$. (of zie 38b)
Dus de functies $y_1$ (neem $c = 5$) en $y_5$ (neem $c = -6$) zijn oplossing van de dv $D_1$.

38b $y_1(t) = 1\frac{1}{2}t^2 + 5 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 1\frac{1}{2} \cdot 2t = 3t$.
$y_2(t) = 5e^{3t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = 5e^{3t} \cdot 3 = 15e^{3t}$ $(= 3 \cdot y_2)$.
$y_3(t) = 3t^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 2t = 6t$ $(\neq 3 \cdot y_3)$.
$y_4(t) = e^{3t} + 2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = e^{3t} \cdot 3 = 3e^{3t}$ $(\neq 3 \cdot y_4)$.
$y_5(t) = 1\frac{1}{2}t^2 - 6 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 1\frac{1}{2} \cdot 2t = 3t$ $(\neq 3 \cdot y_5)$.
$y_6(t) = -3e^{3t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = -3e^{3t} \cdot 3 = -9e^{3t}$ $(= 3 \cdot y_6)$.

$y_1(t)$ voldoet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$, maar niet aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.
$y_2(t)$ voldoet niet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$, maar wel aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.
$y_3(t)$ voldoet niet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$ en niet aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.
$y_4(t)$ voldoet niet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$ en niet aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.
$y_5(t)$ voldoet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$, maar niet aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.
$y_6(t)$ voldoet niet aan $D_1$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t$, maar wel aan $D_2$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y$.

39a $y(t) = G(t) + c \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)$ invullen in $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)$ geeft $g(t) = g(t)$.
Deze vergelijking klopt voor elke $t \Rightarrow y(t) = G(t) + c$ is een oplossing van de dv $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)$.

39b $y(t) = ce^{at} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ce^{at} \cdot a = ace^{at}$ invullen in $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay$ geeft $ace^{at} = a \cdot ce^{at}$. Dit klopt voor elke $t$.

40a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos(t) + t^2 + 5 \Rightarrow y(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}t^3 + 5t + c$ (de algemene oplossing van de dv).

40b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}2y \Rightarrow y(t) = ce^{0{,}2t}$ (de algemene oplossing van de dv).

40c $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{y^2}$ (var. scheiden) $\Rightarrow y^2\mathrm{d}y = 5\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}y^3\right) = \mathrm{d}\left(5t\right)$
$\frac{1}{3}y^3 = 5t + c_1$
(algemene oplossing) $y^3 = 15t + c$.

40d $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1-t}{y-3}$ (var. scheiden) $\Rightarrow (y-3)\mathrm{d}y = (1-t)\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(y-3)^2\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{2}(1-t)^2\right)$
$\frac{1}{2}(y-3)^2 = -\frac{1}{2}(1-t)^2 + c_1$
(algemene oplossing) $(1-t)^2 + (y-3)^2 = c$.

41a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{6t}{y+1} \Rightarrow (y+1)\mathrm{d}y = 6t\,\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(y+1)^2\right) = \mathrm{d}\left(3t^2\right)$
$\frac{1}{2}(y+1)^2 = 3t^2 + c_1$
$-6t^2 + (y+1)^2 = c$.

41b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t \cdot y^2} \Rightarrow y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}y^3\right) = \mathrm{d}\left(\ln|t|\right)$
$\frac{1}{3}y^3 = \ln|t| + c_1$
$y^3 = 3 \cdot \ln|t| + c$.

41c $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t^2 + t^2y = t^2(1+y) \Rightarrow \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y = t^2\mathrm{d}t$
$(y > -1 \Rightarrow 1 + y > 0)$ $\mathrm{d}\left(\ln(1+y)\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}t^3\right)$
$\ln(1+y) = \frac{1}{3}t^3 + c_1$ ($e^{\cdots}$ nemen)
$1 + y = e^{\frac{1}{3}t^3 + c_1}$
$1 + y = e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$
$1 + y = c \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$ $(c > 0)$
$y = c \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} - 1$ met $c > 0$.

41d $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (1+y) \cdot e^{t} \Rightarrow \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y = e^{t}\mathrm{d}t$
$(y > -1 \Rightarrow 1 + y > 0)$ $\mathrm{d}\left(\ln(1+y)\right) = \mathrm{d}\left(e^{t}\right)$
$\ln(1+y) = e^{t} + c_1$ ($e^{\cdots}$ nemen)
$1 + y = e^{e^{t} + c_1}$
$1 + y = e^{c_1} \cdot e^{e^{t}}$
$1 + y = c \cdot e^{e^{t}}$ $(c > 0)$
$y = c \cdot e^{e^{t}} - 1$ met $c > 0$.

42a $I(0)=5\cdot e^0=5\cdot 1=5.$
$I(t)=5\cdot e^{-t}\Rightarrow \frac{dI}{dt}=5\cdot e^{-t}\cdot -1=-5\cdot e^{-t}$ invullen in $\frac{dI}{dt}=\frac{-1}{R\cdot C}\cdot I$ geeft $-5\cdot e^{t}=\frac{-1}{R\cdot C}\cdot 5\cdot e^{t}\Rightarrow -1=\frac{-1}{R\cdot C}\Rightarrow R\cdot C=1.$

42b $R\cdot C=10\Rightarrow \frac{dI}{dt}=\frac{-1}{10}\cdot I$ met als algemene oplossing $I(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.
Uit $I(2)=3$ volgt verder dat $c\cdot e^{-\frac{2}{10}}=3\Rightarrow c\cdot e^{-\frac{1}{5}}=3\Rightarrow c=3\cdot e^{\frac{1}{5}}=3\cdot\sqrt[5]{e}.$
Dus $I(t)=3\cdot\sqrt[5]{e}\cdot e^{-\frac{1}{10}t}$ en $I(0)=3\cdot\sqrt[5]{e}\cdot e^0=3\cdot\sqrt[5]{e}\cdot 1=3\cdot\sqrt[5]{e}.$

43a Stel $y=at^2+bt+c$ is een oplossing van de dv.
$y=at^2+bt+c\Rightarrow \frac{dy}{dt}=2at+b.$
Invullen in $\frac{dy}{dt}=2y-4t^2+4t$ geeft
$2at+b=2(at^2+bt+c)-4t^2+4t$
$2at+b=(2a-4)t^2+(2b+4)t+2c$ (voor elke $t$)
$2a-4=0\wedge 2a=2b+4\wedge b=2c$
$2a=4\wedge 2b=2a-4\wedge b=2c$
$a=2\wedge 2b=4-4\wedge b=2c$
$a=2\wedge b=0\wedge c=0.$
De formule van de parabool is $y=2t^2$.

43b $\frac{dy}{dt}=2y\Rightarrow y(t)=c\cdot e^{2t}.$

43c De som van de oplossingen is $y=2t^2+ce^{2t}$.
$y=2t^2+ce^{2t}\Rightarrow \frac{dy}{dt}=4t+ce^{2t}\cdot 2=4t+2ce^{2t}.$
Invullen in $\frac{dy}{dt}=2y-4t^2+4t$ geeft
$4t+2ce^{2t}=2(2t^2+ce^{2t})-4t^2+4t$
$4t+2ce^{2t}=4t^2+2ce^{2t}-4t^2+4t$
$4t+2ce^{2t}=2ce^{2t}+4t.$
Deze vergelijking klopt voor elke $t$,
dus de som van de oplossingen van
42a en 42b is een oplossing van de dv.

44a $y=a(t)+p(t)\Rightarrow \frac{dy}{dt}=a'(t)+p'(t)=f(t)\cdot a(t)+f(t)\cdot p(t)+g(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt}=f(t)\cdot y+g(t)$ geeft
$f(t)\cdot a(t)+f(t)\cdot p(t)+g(t)=f(t)\cdot\left(a(t)+p(t)\right)+g(t)$
$f(t)\cdot a(t)+f(t)\cdot p(t)+g(t)=f(t)\cdot a(t)+f(t)\cdot p(t)+g(t)$
Deze vergelijking klopt voor elke waarde van $t\Rightarrow y=a(t)+p(t)$ is oplossing van de dv.

44b $a(t)=c\cdot e^{F(t)}\Rightarrow \frac{dy}{dt}=a'(t)=c\cdot e^{F(t)}\cdot F'(t)=c\cdot e^{F(t)}\cdot f(t)$ in $\frac{dy}{dt}=f(t)\cdot y$ geeft $c\cdot e^{F(t)}\cdot f(t)=f(t)\cdot c\cdot e^{F(t)}$.
Dit klopt voor elke waarde van $t\Rightarrow a(t)=c\cdot e^{F(t)}$ is de algemene oplossing van de homogene vergelijking van de dv.

44c $y=a(t)+p(t)=c\cdot e^{F(t)}+p(t)\Rightarrow c\cdot e^{F(t)}+p(t)=y\Rightarrow c\cdot e^{F(t)}=y-p(t)\Rightarrow c=\frac{y-p(t)}{e^{F(t)}}.$
Voor elk punt $(t, y)$ bestaat er dus precies één waarde van $c$.
Hieruit volgt dat er door elk punt $(t, y)$ precies één oplossingskromme van de vorm $y=c\cdot e^{F(t)}+p(t)$ gaat.

45a Stel $y=at+b$ is een oplossing van de dv.
$y=at+b\Rightarrow \frac{dy}{dt}=a$ in $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}y+2t-4$ geeft
$a=-\frac{1}{2}(at+b)+2t-4$
$a=-\frac{1}{2}at-\frac{1}{2}b+2t-4$
$a=(-\frac{1}{2}a+2)t-\frac{1}{2}b-4$ (voor elke $t$)
$-\frac{1}{2}a+2=0\wedge a=-\frac{1}{2}b-4$
$-a+4=0\wedge \frac{1}{2}b=-a-4$
$a=4\wedge b=-2a-8=-2\cdot 4-8=-16.$
Dus $y(t)=4t-16$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}t}+4t-16.$

45b $y(t)=3$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dy}{dt}=-2y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{-2t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{-2t}+3.$

45c Stel $y=at+b$ is een oplossing van de dv.
$y=at+b\Rightarrow \frac{dy}{dt}=a$ in $\frac{dy}{dt}=2y-4t+6$ geeft
$a=2(at+b)-4t+6$
$a=2at+2b-4t+6$
$a=(2a-4)t+2b+6$ (voor elke $t$)
$2a-4=0\wedge a=2b+6$
$2a=4\wedge 2b=a-6$
$a=2\wedge b=\frac{1}{2}a-3=\frac{1}{2}\cdot 2-3=-2.$
Dus $y(t)=2t-2$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dy}{dt}=2y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{2t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{2t}+2t-2.$

45d $\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{10}(T-21)=-\frac{1}{10}T+\frac{21}{10}.$
$T(t)=21$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{10}T$ geeft $T(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.
De algemene oplossing is $T(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{10}t}+21.$

46a Stel $y=A\sin(t)+B\cos(t)$ is een oplossing van de dv.
$y=A\sin(t)+B\cos(t)\Rightarrow \frac{dy}{dt}=A\cos(t)-B\sin(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt}=2y+\cos(t)$ geeft
$A\cos(t)-B\sin(t)=2(A\sin(t)+B\cos(t))+\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=2A\sin(t)+2B\cos(t)+\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=2A\sin(t)+(2B+1)\cos(t)$ (voor elke $t$) zie de berekening van $A$ en $B$ hiernaast

$A=2B+1\wedge -B=2A$
$A=2B+1\wedge B=-2A$
$A=-4A+1\wedge B=-2A$
$5A=1\wedge B=-2A$
$A=\frac{1}{5}\wedge B=-\frac{2}{5}.$

Dus $y(t)=\frac{1}{5}\sin(t)-\frac{2}{5}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=2y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{2t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{2t}+\frac{1}{5}\sin(t)-\frac{2}{5}\cos(t)$.

46b Stel $y=A\sin(t)+B\cos(t)$ is een oplossing van de dv.
$y=A\sin(t)+B\cos(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cos(t)-B\sin(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt}=-3y-\sin(t)$ geeft
$A\cos(t)-B\sin(t)=-3(A\sin(t)+B\cos(t))-\sin(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=-3A\sin(t)-3B\cos(t)-\sin(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=(-3A-1)\sin(t)-3B\cos(t)$ (voor elke $t$) de berekening van $A$ en $B$ ⇨
$A=-3B\wedge -B=-3A-1$
$A=-3B\wedge -B=9B-1$
$A=-3B\wedge -10B=-1$
$A=-3B\wedge B=\frac{1}{10}$
$A=-\frac{3}{10}\wedge B=\frac{1}{10}$.
Dus $y(t)=-\frac{3}{10}\sin(t)+\frac{1}{10}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=-3y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{-3t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{-3t}-\frac{3}{10}\sin(t)+\frac{1}{10}\cos(t)$.

46c Stel $y=A\sin(t)+B\cos(t)$ is een oplossing van de dv.
$y=A\sin(t)+B\cos(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cos(t)-B\sin(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt}=4y+\cos(t)$ geeft
$A\cos(t)-B\sin(t)=4(A\sin(t)+B\cos(t))+\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=4A\sin(t)+4B\cos(t)+\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=4A\sin(t)+(4B-1)\cos(t)$ (voor elke $t$) de berekening van $A$ en $B$ ⇨
$A=4B-1\wedge -B=4A$
$A=4B-1\wedge B=-4A$
$A=-16A-1\wedge B=-4A$
$17A=-1\wedge B=-4A$
$A=-\frac{1}{17}\wedge B=\frac{4}{17}$.
Dus $y(t)=-\frac{1}{17}\sin(t)+\frac{4}{17}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=4y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{4t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{4t}-\frac{1}{17}\sin(t)+\frac{4}{17}\cos(t)$.

46d Stel $y=A\sin(t)+B\cos(t)$ is een oplossing van de dv.
$y=A\sin(t)+B\cos(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cos(t)-B\sin(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y+2\sin(t)-3\cos(t)$ geeft
$A\cos(t)-B\sin(t)=\frac{1}{2}(A\sin(t)+B\cos(t))+2\sin(t)-3\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=\frac{1}{2}A\sin(t)+\frac{1}{2}B\cos(t)+2\sin(t)-3\cos(t)$
$A\cos(t)-B\sin(t)=(\frac{1}{2}A+2)\sin(t)+(\frac{1}{2}B-3)\cos(t)$ (voor elke $t$) $A$ en $B$ ⇨
$A=\frac{1}{2}B-3\wedge -B=\frac{1}{2}A+2$
$A=\frac{1}{2}B-3\wedge -B=\frac{1}{4}B-1\frac{1}{2}+2$
$A=\frac{1}{2}B-3\wedge -\frac{5}{4}B=\frac{1}{2}$
$A=\frac{1}{2}B-3\wedge -5B=2$
$A=\frac{1}{2}B-3\wedge B=-\frac{2}{5}$
$A=\frac{1}{2}\cdot-\frac{2}{5}-3=-3\frac{1}{5}\wedge B=-\frac{2}{5}$.
Dus $y(t)=-3\frac{1}{5}\sin(t)-\frac{2}{5}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{\frac{1}{2}t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{\frac{1}{2}t}-3\frac{1}{5}\sin(t)-\frac{2}{5}\cos(t)$.

47a Stel $y=A\cdot e^{t}$ is een oplossing van de dv.
$y=A\cdot e^{t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cdot e^{t}$ subst. in $\frac{dy}{dt}=2y-3e^{t}$ geeft
$A\cdot e^{t}=2\cdot A\cdot e^{t}-3e^{t}$
$A\cdot e^{t}=(2A-3)\cdot e^{t}$ (voor elke $t$)
$A=2A-3$
$-A=-3\Rightarrow A=3$.
Dus $y(t)=3e^{t}$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=2y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{2t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{2t}+3e^{t}$.

47b Stel $y=A\cdot e^{t}$ is een oplossing van de dv.
$y=A\cdot e^{t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cdot e^{t}$ subst. in $\frac{dy}{dt}=10y-5e^{t}$ geeft
$A\cdot e^{t}=10\cdot A\cdot e^{t}-5e^{t}$
$A\cdot e^{t}=(10A-5)\cdot e^{t}$ (voor elke $t$)
$A=10A-5$
$-9A=-5\Rightarrow A=\frac{5}{9}$.
Dus $y(t)=\frac{5}{9}e^{t}$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=10y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{10t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{10t}+\frac{5}{9}e^{t}$.

47c Stel $y=A\cdot e^{t}$ is een oplossing van de dv.
$y=A\cdot e^{t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cdot e^{t}$ subst. in $\frac{dy}{dt}=-2y+e^{t}$ geeft
$A\cdot e^{t}=-2\cdot A\cdot e^{t}+e^{t}$
$A\cdot e^{t}=(-2A+1)\cdot e^{t}$ (voor elke $t$)
$A=-2A+1$
$3A=1\Rightarrow A=\frac{1}{3}$.
Dus $y(t)=\frac{1}{3}e^{t}$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=-2y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{-2t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}$.

47d Stel $y=A\cdot e^{t}$ is een oplossing van de dv.
$y=A\cdot e^{t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=A\cdot e^{t}$ subst. in $\frac{dy}{dt}=1{,}5y+2e^{t}$ geeft
$A\cdot e^{t}=1{,}5\cdot A\cdot e^{t}+2e^{t}$
$A\cdot e^{t}=(1{,}5A+2)\cdot e^{t}$ (voor elke $t$)
$A=1{,}5A+2$
$-0{,}5A=2\Rightarrow A=-4$.
Dus $y(t)=-4e^{t}$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt}=1{,}5y$ geeft $y(t)=c\cdot e^{1{,}5t}$.
De algemene oplossing is $y(t)=c\cdot e^{1{,}5t}-4e^{t}$.

48a Stel $y = at + b$ is een oplossing van de dv.

$y = at + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a$ subst. in $\frac{dy}{dt} = 2y + 4t - 2$
$a = 2(at + b) + 4t - 2$
$a = 2at + 2b + 4t - 2$
$a = (2a + 4)t + 2b - 2$ (voor elke $t$)
$2a + 4 = 0 \wedge a = 2b - 2$
$2a = -4 \wedge 2b = a + 2$
$a = -2 \wedge b = \frac{1}{2}a + 1 = -1 + 1 = 0$
Dus $y(t) = -2t$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = 2y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{2t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{2t} - 2t$.

48b Stel $y = A \cdot e^{2t}$ is een oplossing van de dv.

$y = A \cdot e^{2t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = A \cdot e^{2t} \cdot 2$ subst. in $\frac{dy}{dt} = 0{,}5y + 4e^{2t}$
$2Ae^{2t} = 0{,}5Ae^{2t} + 4e^{2t}$
$2Ae^{t} = (0{,}5A + 4)e^{t}$ (voor elke $t$)
$2A = 0{,}5A + 4$
$1{,}5A = 4 \Rightarrow 3A = 8 \Rightarrow A = \frac{8}{3}$.
Dus $y(t) = \frac{8}{3}e^{2t}$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = 0{,}5y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{0{,}5t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{0{,}5t} + \frac{8}{3}e^{2t}$.

48c Stel $y = A\sin(2t) + B\cos(2t)$ is een oplossing van de dv.
$y = A\sin(2t) + B\cos(2t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = A\cos(2t) \cdot 2 - B\sin(2t) \cdot 2$ subst in $\frac{dy}{dt} = -3y + \sin(2t)$
$2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) = -3(A\sin(2t) + B\cos(2t)) + \sin(2t)$
$2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) = -3A\sin(2t) - 3B\cos(2t) + \sin(2t)$
$2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) = (-3A + 1)\sin(2t) - 3B\cos(2t)$ (voor elke $t$)

$A$ en $B \Rightarrow$ $2A = -3B \wedge -2B = -3A + 1$
$A = -1{,}5B \wedge -2B = 4{,}5B + 1$
$A = -1{,}5B \wedge -6{,}5B = 1$
$A = -1{,}5B \wedge B = -\frac{1}{6{,}5} = -\frac{2}{13}$
$A = \frac{3}{13} \wedge B = -\frac{2}{13}$.

Dus $y(t) = \frac{3}{13}\sin(t) - \frac{2}{13}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = -3y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{-3t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{-3t} + \frac{3}{13}\sin(t) - \frac{2}{13}\cos(t)$.

48d Stel $y = at^2 + bt + c$ is een oplossing van de dv.
$y = at^2 + bt + c \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2at + b$ substitueren in $\frac{dy}{dt} = -2y + 2t^2 - 4t$ geeft
$2at + b = -2(at^2 + bt + c) + 2t^2 - 4t$
$2at + b = -2at^2 - 2bt - 2c + 2t^2 - 4t$
$2at + b = (-2a + 2)t^2 + (-2b - 4)t - 2c$ (voor elke $t$)
$-2a + 2 = 0 \wedge 2a = -2b - 4 \wedge b = -2c$
$2a = 2 \wedge 2b = -2a - 4 \wedge 2c = -b$
$a = 1 \wedge 2b = -2 - 4 \wedge 2c = -b$
$a = 1 \wedge b = -3 \wedge c = 1{,}5$. (hiernaast gaat het verder)

Dus $y(t) = t^2 - 3t + 1{,}5$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = -2y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{-2t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{-2t} + t^2 - 3t + 1{,}5$.

49a $y(t) = -3$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = -y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{-t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{-t} - 3$.
$y(t)$ met $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c \cdot e^{0} - 3 \Rightarrow 4 = c$.
Dus $y(t) = 4e^{-t} - 3$.

49b De oplossingkromme $y(t)$ gaat door $O(0, 0) \Rightarrow y(0) = 0$.
$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c \cdot e^{0} - 3 \Rightarrow 3 = c$.
Dus $y(t) = 3e^{-t} - 3$.
$t = 1$ geeft $y(1) = 3e^{-1} - 3 = \frac{3}{e} - 3 = -3 + \frac{3}{e}$.
Dus $(1,\ -3 + \frac{3}{e})$ ligt op de oplossingskromme door $O$.

49c Oplossingkromme $y(t)$ gaat door $(3, 1) \Rightarrow y(3) = 1$.
$y(3) = 1 \Rightarrow 1 = c \cdot e^{-3} - 3 \Rightarrow 4 = c \cdot e^{-3} \Rightarrow c = 4e^{3}$.
Dus $y(t) = 4e^{3}e^{-t} - 3 = 4e^{3-t} - 3$.
$y(a) = 8$ geeft $y(a) = 4e^{3-a} - 3 = 8$
$4e^{3-a} = 11$
$e^{3-a} = \frac{11}{4}$
$3 - a = \ln(\frac{11}{4})$
$3 - \ln(\frac{11}{4}) = a$.

50a $\frac{dT}{dt} = -0{,}035(T - 18) = -0{,}035T + 0{,}63$.

```
-0.035*-18
                .63
```

$T(t) = 18$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dT}{dt} = -0{,}035T$ geeft $T(t) = c \cdot e^{-0{,}035t}$.
De algemene oplossing is $T(t) = c \cdot e^{-0{,}035t} + 18$.
$T(0) = 5 \Rightarrow 5 = c \cdot e^{0} + 18 \Rightarrow -13 = c$.
Dus $T(t) = 18 - 13e^{-0{,}035t}$.

50b $T(5) = 18 - 13e^{-0{,}035 \times 5} \approx 7$ (°C).

```
18-13e^(-0.035*5
)
         7.08705873
```

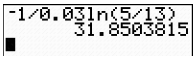
50c $T(t) = 18 - 13e^{-0{,}035t} = 15$
$-13e^{-0{,}035t} = -3$
$e^{-0{,}035t} = \frac{3}{13}$
$-0{,}035t = \ln(\frac{3}{13})$

```
1/-0.035ln(3/13)
        41.89534482
```

$t = \frac{1}{-0{,}035}\ln(\frac{3}{13}) \approx 41{,}9$.
Dus na (ongeveer) 42 minuten is $T = 15$ °C.

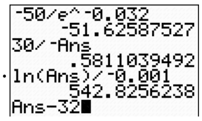
51a $\frac{dT}{dt} = -0{,}03(T - 150) = -0{,}03T + 4{,}5$.
$T(t) = 150$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dT}{dt} = -0{,}03T$ geeft $T(t) = c \cdot e^{-0{,}03t}$.
De algemene oplossing is $T(t) = c \cdot e^{-0{,}03t} + 150$.

De algemene oplossing is $T(t) = c \cdot e^{-0{,}03t} + 150$.
$T(0) = 20 \Rightarrow 20 = c \cdot e^{0} + 150 \Rightarrow -130 = c$.
Dus $T(t) = 150 - 130e^{-0{,}03t}$.
$T(t) = 100 \Rightarrow 100 = 150 - 130e^{-0{,}03t}$ (intersect of)
$130e^{-0{,}03t} = 50$
$e^{-0{,}03t} = \frac{5}{13}$
$-0{,}03t = \ln(\frac{5}{13})$



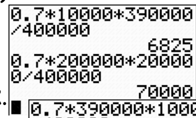

$t = -\frac{1}{0{,}03}\ln(\frac{5}{13}) \approx 31{,}9$.
Dus na (ongeveer) 32 minuten is $T = 100$ °C.

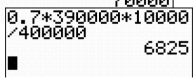
51b Homogene deel $\frac{dT}{dt} = -0{,}001T$ geeft $T(t) = c \cdot e^{-0{,}001t}$.
Dus de algemene oplossing is $T(t) = c \cdot e^{-0{,}001t} + 150$.
$T(32) = 100 \Rightarrow 100 = c \cdot e^{-0{,}032} + 150 \Rightarrow c = \frac{-50}{e^{-0{,}032}} \approx -51{,}63$.
Dus $T(t) = 150 - 51{,}63e^{-0{,}001t}$.
$T(t) = 120 \Rightarrow 120 = 150 - 51{,}63e^{-0{,}001t}$ (intersect of)
$51{,}63e^{-0{,}001t} = 30$
$e^{-0{,}001t} = \frac{30}{51{,}63}$
$-0{,}001t = \ln(\frac{30}{51{,}63}) \Rightarrow t = -\frac{1}{0{,}001}\ln(\frac{30}{51{,}63}) \approx 543$.
Na (ongeveer) $543 - 32 = 511$ min. is $T = 120$ °C.



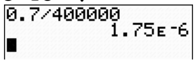

52a $\frac{dN}{dt} = 0{,}7N$ geeft $N(t) = c \cdot e^{0{,}7N}$. Verder gegeven: $T(0) = 1000 \Rightarrow 1000 = c \cdot e^{0} = c$. Dus $N(t) = 1000 \cdot e^{0{,}7N}$.

52b $N = 10\,000 \Rightarrow \left[\frac{dN}{dt}\right]_{N=10\,000} = 0{,}7 \cdot 10\,000 \cdot \frac{400\,000 - 10\,000}{400\,000} = 6\,825$ besmettingen/week.
$N = 200\,000 \Rightarrow \left[\frac{dN}{dt}\right]_{N=200\,000} = 0{,}7 \cdot 200\,000 \cdot \frac{400\,000 - 200\,000}{400\,000} = 70\,000$ besmettingen/week.
$N = 390\,000 \Rightarrow \left[\frac{dN}{dt}\right]_{N=390\,000} = 0{,}7 \cdot 390\,000 \cdot \frac{400\,000 - 390\,000}{400\,000} = 6\,825$ besmettingen/week.




52c $\frac{dN}{dt} = 0{,}7N \cdot \frac{400\,000 - N}{400\,000} = \frac{0{,}7}{400\,000} \cdot N \cdot (400\,000 - N) = 1{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (400\,000 - N)$. Dus $c = 1{,}75 \cdot 10^{-6}$.




53a $y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ geeft $\frac{dy}{du} = -1 \cdot u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$. Substitutie van $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}$ in $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$ geeft $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$

53b Uit $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$ volgt $\frac{du}{dt} = -u^2 \cdot \frac{dy}{dt}$ en uit $y = \frac{1}{u}$ volgt $u = \frac{1}{y}$.
Substitutie van $u = \frac{1}{y}$ in $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ in $\frac{du}{dt} = -u^2 \cdot \frac{dy}{dt}$ geeft
$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{y^2} \cdot y(1-y) = -\frac{1}{y}(1-y) = -\frac{1}{y} + 1 = -\left(\frac{1}{y} - 1\right) = -(u-1)$.
$\frac{du}{dt} = -(u-1)$ geeft als alg. oplossing $u = 1 + c \cdot e^{-t}$. (een part. oplossing is $y = 1$ en homogene deel $\frac{du}{dt} = -u$ geeft $u = c \cdot e^{-t}$)

53c Substitutie van $u = 1 + c \cdot e^{-t}$ in $y = \frac{1}{u}$ geeft dan $y = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-t}}$.

54a Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = y^2 + 4y$ geeft $\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \left(\frac{1}{u}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u^2} + \frac{4}{u}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -1 - 4u$.
$u(t) = -\frac{1}{4}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -1 - 4u$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = -4u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-4t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -1 - 4u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-4t} - \frac{1}{4}$.
$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-4t} - \frac{1}{4}} = \frac{-4}{-4c_1 \cdot e^{-4t} + 1} = \frac{-4}{c \cdot e^{-4t} + 1}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = y^2 + 4y$ is $y(t) = \frac{-4}{1 + c \cdot e^{-4t}}$.

54b Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(1-y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2$ geeft
$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$.
$u(t) = 1$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 1$ met $y = \frac{1}{u} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 1} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}}$.

54c Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = 0{,}1y(1 - \frac{y}{100}) = \frac{y}{10} - \frac{y^2}{1000}$ geeft
$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{10u} - \frac{1}{1000u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{10}u + \frac{1}{1000}$.
$u(t) = \frac{1}{100}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{10}u + \frac{1}{1000}$ en homogeen deel $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{10}u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{10}u + \frac{1}{1000}$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} + \frac{1}{100}$.
$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} + \frac{1}{100}} = \frac{100}{100c_1 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} + 1}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 0{,}1y(1 - \frac{y}{100})$ is $y(t) = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-\frac{1}{10}t}}$.

54d Substitutie van $A = \frac{1}{u}$ in $\frac{dA}{dt} = 0{,}001A(1 - \frac{A}{20}) = \frac{1}{1000}A - \frac{1}{20000}A^2$ geeft
$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{20000} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{1000u} - \frac{1}{20000u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{1000}u + \frac{1}{20000}$.
$u(t) = \frac{1}{20}$ is een part. oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{1000}u + \frac{1}{20000}$ en homogene deel $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{1000}u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{1000}t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{1000}u + \frac{1}{20000}$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{1000}t} + \frac{1}{20}$.
$A = \frac{1}{u}$ geeft $A(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-\frac{1}{1000}t} + \frac{1}{20}} = \frac{20}{20c_1 \cdot e^{-\frac{1}{1000}t} + 1}$. De alg. oplossing van $\frac{dA}{dt} = 0{,}1y(1 - \frac{y}{100})$ is $A(t) = \frac{20}{1 + c \cdot e^{-\frac{1}{1000}t}}$.

55a Subst. van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 10y$ geeft $\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = 2\left(\frac{1}{u}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{2}{u^2} - \frac{10}{u}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -2 + 10u$.
$u(t) = \frac{1}{5}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -2 + 10u$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = 10u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{10t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -2 + 10u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{10t} + \frac{1}{5}$.
$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{10t} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{5c_1 \cdot e^{10t} + 1} = \frac{5}{c \cdot e^{10t} + 1}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 10y$ is $y(t) = \frac{5}{1 + c \cdot e^{10t}}$.

55b Stel $y = A\sin(t) + B\cos(t) + C \cdot e^t$ is een oplossing van de dv.
$y = A\sin(t) + B\cos(t) + C \cdot e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = A\cos(t) - B\sin(t) + C \cdot e^t$ invullen in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 4e^t - 2\sin(t)$ geeft
$A\cos(t) - B\sin(t) + C \cdot e^t = \frac{1}{2}(A\sin(t) + B\cos(t) + C \cdot e^t) + 4e^t - 2\sin(t)$
$A\cos(t) - B\sin(t) + C \cdot e^t = \frac{1}{2}A\sin(t) + \frac{1}{2}B\cos(t) + \frac{1}{2}C \cdot e^t + 4e^t - 2\sin(t)$
$A\cos(t) - B\sin(t) + C \cdot e^t = (\frac{1}{2}A - 2)\sin(t) + \frac{1}{2}B\cos(t) + (\frac{1}{2}C + 4) \cdot e^t$

$A = \frac{1}{2}B \wedge -B = \frac{1}{2}A - 2 \wedge C = \frac{1}{2}C + 4$
$A = \frac{1}{2}B \wedge -B = \frac{1}{4}B - 2 \wedge \frac{1}{2}C = 4$
$A = \frac{1}{2}B \wedge -\frac{5}{4}B = -2 \wedge C = 8$
$A = \frac{1}{2}B \wedge B = \frac{8}{5} \wedge C = 8$
$A = \frac{4}{5} \wedge B = \frac{8}{5} \wedge C = 8$

Dus $y(t) = \frac{4}{5}\sin(t) + \frac{8}{6}\cos(t) + 8e^t$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{2}t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{2}t} + \frac{4}{5}\sin(t) + \frac{8}{6}\cos(t) + 8e^t$.

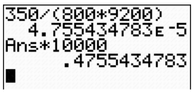
55c $\frac{dy}{dt} = 3ty + 6t = 3t(y + 2)$ met $y > -2$ geeft (met scheiden van variabelen) $\frac{1}{y+2}dy = 3tdt$
(| | om $y + 2$ hoeft niet omdat $y + 2 > 0$, want $y > -2$)
$d(\ln(y + 2)) = d\left(1\frac{1}{2}t^2\right)$
$\ln(y + 2) = 1\frac{1}{2}t^2 + c_1$
$y + 2 = e^{1\frac{1}{2}t^2 + c_1}$
De algemene oplossing van de dv is: $y = -2 + e^{1\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{+c_1} = -2 + c \cdot e^{1\frac{1}{2}t^2}$ met $c > 0$.

55d Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = -2y + 12y^2$ geeft $\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = -2 \cdot \frac{1}{u} + 12\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{12}{u^2} - \frac{2}{u}$ ($\times\ -u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -12 + 2u$.
$u(t) = 6$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -12 + 2u$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = 2u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{2t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -12 + 2u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{2t} + 6$.
$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{2t} + 6}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 10y$ is $y(t) = \frac{1}{6 + c \cdot e^{2t}}$.

56a Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = y - 2y^2$ geeft $\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{1}{u} - 2\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{-2}{u^2} + \frac{1}{u}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = 2 - u$.
$u(t) = 2$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 2 - u$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = -u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-t}$.
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 2 - u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-t} + 2$.
$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-t} + 2}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = y - 2y^2$ is $y(t) = \frac{1}{2 + c \cdot e^{-t}}$.
$y(t) = \frac{1}{2 + c \cdot e^{-t}}$ door $(0, \frac{1}{5}) \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{2 + c \cdot e^0} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{2 + c} \Rightarrow 2 + c = 5 \Rightarrow c = 3$. Dus de oplossing is $y(t) = \frac{1}{2 + 3 \cdot e^{-t}}$.

56b $y(t) = \frac{1}{2 + c \cdot e^{-t}}$ door $(0, 2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{2 + c \cdot e^0} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{2 + c} \Rightarrow 4 + 2c = 1 \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = 1\frac{1}{2}$.
Dus de oplossing is $y(t) = \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2} \cdot e^{-t}}$.
$t = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2} \cdot e^{-1}} = \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2} \cdot e^{-1}} \cdot \frac{e}{e} = \frac{e}{2e - 1\frac{1}{2}} = \frac{2e}{4e - 3}$. Dus $\left(1, \frac{2e}{4e - 3}\right)$ ligt dan op de oplossingskromme door $(0, 2)$.

57a Op $t=0$ is $N=800$ in $\frac{dN}{dt}=350 \Rightarrow 350=c\cdot 800\cdot(10\,000-800) \Rightarrow c=\frac{350}{800\cdot 9200}=4{,}7...\cdot 10^{-5}$.




Substitutie van $N=\frac{1}{u}$ in $\frac{dN}{dt}=4{,}7...\cdot 10^{-5}\cdot N\cdot(10\,000-N)=0{,}47...N-4{,}7...\cdot 10^{-5}\cdot N^2$ geeft

$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt}=0{,}4755\cdot\frac{1}{u}-4{,}755...\cdot 10^{-5}\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{0{,}47...}{u}-\frac{4{,}7...\cdot 10^{-5}}{u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt}=-0{,}47...u+4{,}7...\cdot 10^{-5}$.

$u(t)=0{,}0001$ een part. opl. van $\frac{du}{dt}=-0{,}47...u+4{,}7...\cdot 10^{-5}$ en hom. deel $\frac{du}{dt}=-0{,}47...u$ geeft $u(t)=c_1\cdot e^{-0{,}47...t}$.

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt}=-0{,}47...u+4{,}7...\cdot 10^{-5}$ is $u(t)=c_1\cdot e^{-0{,}47...t}+0{,}0001$.

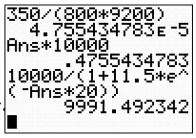
$N=\frac{1}{u}$ geeft $N(t)=\frac{1}{c_1\cdot e^{-0{,}47...t}+0{,}0001}=\frac{10\,000}{10\,000c_1\cdot e^{-0{,}47...t}+1}=\frac{10\,000}{c\cdot e^{-0{,}47...t}+1}$.

De algemene oplossing van $\frac{dN}{dt}=4{,}7...\cdot 10^{-5}\cdot N\cdot(10\,000-N)$ is $N(t)=\frac{10\,000}{1+c\cdot e^{-0{,}47...t}}$.

$N(t)=\frac{10\,000}{1+c\cdot e^{-0{,}47...t}}$ door $(0,800) \Rightarrow 800=\frac{10\,000}{1+c\cdot e^{0}} \Rightarrow 800=\frac{10\,000}{1+c} \Rightarrow 1+c=\frac{10\,000}{800}=12{,}5 \Rightarrow c=11{,}5$.

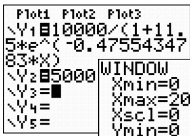
Dus de algemene oplossing van de dv bij de groei van deze populatie zeeotters is $N(t)=\frac{10\,000}{1+11{,}5\cdot e^{-0{,}47...t}}$.

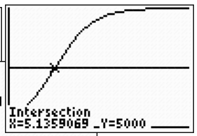
Op $t=20$ is $N=N(20)=\frac{10\,000}{1+11{,}5\cdot e^{-0{,}47...\cdot 20}}\approx 9990$ (zeeotters).

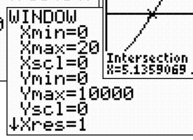



57b $N(t)=\frac{10\,000}{1+11{,}5\cdot e^{-0{,}47...t}}=5000$ (intersect of algebraïsch) $\Rightarrow t\approx 5{,}14$.

Dus vanaf $t\approx 5{,}14$ zijn er meer dan 5000 zeeotters.




58a Substitutie van $L=\frac{1}{u}$ in $\frac{dL}{dt}=6L-0{,}2L^2$ geeft $\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt}=6\cdot\frac{1}{u}-0{,}2\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2}\cdot\frac{du}{dt}=-\frac{0{,}2}{u^2}+\frac{6}{u}$ $(\times -u^2) \Rightarrow \frac{du}{dt}=0{,}2-6u$.

$u(t)=\frac{0{,}2}{6}=\frac{1}{30}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt}=0{,}2-6u$ en het homogene deel $\frac{du}{dt}=-6u$ geeft $u(t)=c_1\cdot e^{-6t}$.

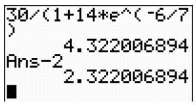
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt}=0{,}2-6u$ is $u(t)=c_1\cdot e^{-6t}+\frac{1}{30}$.

$L=\frac{1}{u}$ geeft $L(t)=\frac{1}{c_1\cdot e^{-6t}+\frac{1}{30}}=\frac{30}{30c_1\cdot e^{-6t}+1}=\frac{30}{c\cdot e^{-6t}+1}$. De alg. oplossing van $\frac{dL}{dt}=6L-0{,}2L^2$ is $L(t)=\frac{30}{1+c\cdot e^{-6t}}$.

$L(t)=\frac{30}{1+c\cdot e^{-6t}}$ met $L(0)=2 \Rightarrow 2=\frac{30}{1+c\cdot e^{0}} \Rightarrow 2=\frac{30}{1+c} \Rightarrow 1+c=\frac{30}{2} \Rightarrow c=14$. Dus de oplossing is $L(t)=\frac{30}{1+14\cdot e^{-6t}}$.

$t=\frac{1}{7}$ (week) $\Rightarrow L(\frac{1}{7})=\frac{30}{1+14\cdot e^{-6\cdot\frac{1}{7}}}\approx 4{,}32$ (cm).

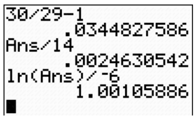
Het plantje groeit de eerste dag (ongeveer) $4{,}32-L(0)=4{,}32-2=2{,}32$ cm.




58b De grenswaarde (berekenen met $\frac{dL}{dt}=0 \Rightarrow 6L-0{,}2L^2=0 \Rightarrow L(6-0{,}2L)=0 \Rightarrow L=6 \vee L=\frac{6}{0{,}2}$) is $L=30$ (cm).

$L(t)=\frac{30}{1+14\cdot e^{-6t}}=29$ (intersect of algebraïsch) $\Rightarrow t\approx 1{,}00$ (weken).

Dus na (ongeveer) 1,00 weken ≈ 7 dagen is de lengte van het plantje 1 cm minder dan de grenswaarde.




59a $\frac{dN}{dt}=0{,}00006N(5000-N)=0{,}3N-0{,}00006N^2$ met $N(0)=4500$.


Substitutie van $N=\frac{1}{u}$ in $\frac{dN}{dt}=0{,}3N-0{,}00006N^2$ geeft

$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt}=0{,}3\cdot\frac{1}{u}-0{,}00006\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2}\cdot\frac{du}{dt}=-\frac{0{,}00006}{u^2}+\frac{0{,}3}{u}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt}=0{,}00006-0{,}3u$.

$u(t)=\frac{0{,}00006}{0{,}3}=0{,}0002$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt}=0{,}00006-0{,}3u$ en

het homogene deel $\frac{du}{dt}=-0{,}3u$ geeft $u(t)=c_1\cdot e^{-0{,}3t}$.

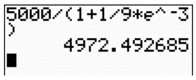
De algemene oplossing van $\frac{du}{dt}=0{,}00006-0{,}3u$ is $u(t)=c_1\cdot e^{-0{,}3t}+0{,}0002$.

$N=\frac{1}{u}$ geeft $N(t)=\frac{1}{c_1\cdot e^{-0{,}3t}+0{,}0002}=\frac{5000}{5000c_1\cdot e^{-0{,}3t}+1}=\frac{5000}{c\cdot e^{-0{,}3t}+1}$.

De algemene oplossing van $\frac{dN}{dt}=0{,}00006N(5000-N)$ is $N(t)=\frac{5000}{1+c\cdot e^{-0{,}3t}}$.

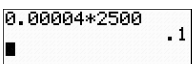
$N(t)=\frac{5000}{1+c\cdot e^{-0{,}3t}}$ met $N(0)=4500 \Rightarrow 4500=\frac{5000}{1+c\cdot e^{0}} \Rightarrow 4500=\frac{5000}{1+c} \Rightarrow 1+c=\frac{5000}{4500}=\frac{10}{9} \Rightarrow c=\frac{1}{9}$.

De gezochte oplossing is $N(t)=\frac{5000}{1+\frac{1}{9}\cdot e^{-0{,}3t}}$. Dus $N(10)=\frac{5000}{1+\frac{1}{9}\cdot e^{-3}}\approx 4972$ (panda's).




59b De grenswaarde (berekenen met $\frac{dN}{dt}=0 \Rightarrow 0{,}00006N(5000-N)=0 \Rightarrow N=0 \vee N=5000$) was 5000 en wordt dus 2500.

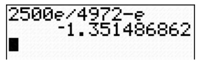
$\frac{dN}{dt}=0{,}00004N(2500-N)=0{,}1N-0{,}00004N^2$ met $N(10)=4972$.



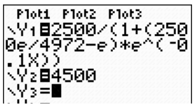

Substitutie van $N=\frac{1}{u}$ in $\frac{dN}{dt}=0{,}1N-0{,}00004N^2$ geeft

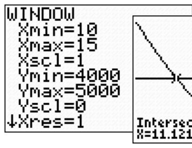
$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt}=0{,}1\cdot\frac{1}{u}-0{,}00004\left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2}\cdot\frac{du}{dt}=-\frac{0{,}00004}{u^2}+\frac{0{,}1}{u}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt}=0{,}00004-0{,}1u$.

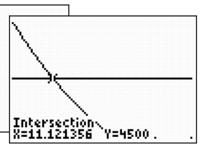
$u(t) = \frac{0{,}00004}{0{,}1} = 0{,}0004$ is een particuliere oplossing van $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0{,}00004 - 0{,}1u$
en het homogene deel $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0{,}1u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-0{,}1t}$.
De algemene oplossing van $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0{,}00004 - 0{,}1u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-0{,}1t} + 0{,}0004$.
$N = \frac{1}{u}$ geeft $N(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-0{,}1t} + 0{,}0004} = \frac{2500}{2500c_1 \cdot e^{-0{,}1t} + 1} = \frac{2500}{c \cdot e^{-0{,}1t} + 1}$.
De algemene oplossing van $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}00004N(2500 - N)$ is $N(t) = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-0{,}1t}}$.




$N(t) = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-0{,}1t}}$ met $N(10) = 4972 \Rightarrow 4972 = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-1}} \Rightarrow 4972 = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-1}} = \frac{2500e}{e + c} \Rightarrow e + c = \frac{2500e}{4972} \Rightarrow c \approx -1{,}351...$
Nu oplossen $N(t) = \frac{2500}{1 + 1{,}351... \cdot e^{-0{,}1t}} = 4500$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 11{,}12$.
Dus $11{,}12 - 10 = 1{,}12$ jaar na $t = 10$ zijn er weer 4500 panda's.




60a De hoogste afgeleide van $y(t)$ die in de dv voorkomt is de tweede afgeleide.
Daarom is de differentiaalvergelijking van de tweede orde.

60b $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow y' = e^{\lambda t} \cdot \lambda = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow y'' = \lambda e^{\lambda t} \cdot \lambda = \lambda^2 e^{\lambda t}$.
Substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$, $y' = \lambda e^{\lambda t}$ en $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ in $y'' + 5y' + 4y = 0$ geeft
$\lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$ (een $e$-macht is altijd positief, dus deel deze eruit)
$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$
$(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 4) = 0$
$\lambda = -1 \vee \lambda = -4$.

60c $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t} \Rightarrow y' = Ae^{-t} \cdot -1 + Be^{-4t} \cdot -4 = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t} \Rightarrow y'' = Ae^{-t} + 16Be^{-4t}$.
Substitutie van $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$, $y' = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$ en $y'' = Ae^{-t} + 16Be^{-4t}$ in $y'' + 5y' + 4y = 0$ geeft
$Ae^{-t} + 16Be^{-4t} + 5(-Ae^{-t} - 4Be^{-4t}) + 4(Ae^{-t} + Be^{-4t}) = 0$
$Ae^{-t} + 16Be^{-4t} - 5Ae^{-t} - 20Be^{-4t} + 4Ae^{-t} + 4Be^{-4t} = 0$
$0 = 0$ (is waar voor elke $A$ en $B$). Dus $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$ voldoet voor elke waarde van $A$ en $B$ aan de dv.

61a $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$.
Substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$, $y' = \lambda e^{\lambda t}$ en $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ in $y'' + 4y' + 5y = 0$ geeft
$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 5e^{\lambda t} = 0$ (een $e$-macht is altijd positief $\Rightarrow$ deel door de $e$-macht)
$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ met $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$.
Dus $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ heeft geen reële oplossingen.

61b $\lambda = \frac{-4 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \vee \lambda = \frac{-4 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$. (of zie hiernaast)

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \\ &\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4 + 5 = 0 \\ &(\lambda + 2)^2 + 1 = 0 \\ &(\lambda + 2)^2 = -1 \\ &(\lambda + 2)^2 = i^2 \\ &\lambda + 2 = i \vee \lambda + 2 = -i \\ &\lambda = -2 + i \vee \lambda = -2 - i. \end{aligned}}$$

62 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft twee reële oplossingen $\lambda_1$ en $\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ en $\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q = 0$.
$y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y' = \lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y'' = \lambda_1^2 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t}$.
Substitutie van $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$, $y' = \lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t}$ en $y'' = \lambda_1^2 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t}$ in
$y'' + py' + qy = 0$ geeft $\lambda_1^2 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} + p\left(\lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t}\right) + q\left(A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}\right) = 0$
$\lambda_1^2 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} + p\lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + p\lambda_2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} + q \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + q \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} = 0$
$(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q) \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} = 0$ (gebruik het resultaat uit de eerste regel)
$0 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + 0 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t} = 0$. Hier staat nu $0 = 0$ en dat klopt (voor elke $A$ en $B$).
Dus alle functies van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ zijn oplossing van de dv.

63 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft één reële oplossing $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ en $(\lambda_1 + \frac{1}{2}p)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ en $\lambda_1 + \frac{1}{2}p = 0$.
$y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} \Rightarrow y' = B \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} \Rightarrow y'' = \lambda_1 \cdot B \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \cdot B \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}$.
Substitutie van $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}$, $y' = \lambda_1 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}$ en $y'' = \lambda_1^2 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}$ in
$y'' + py' + qy = 0$ geeft $2\lambda_1 \cdot B \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} + p \cdot (B \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}) + q \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} = 0$
$(2\lambda_1 + p) \cdot B \cdot e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} = 0$ (gebruik het resultaat uit de eerste regel)
$(2 \cdot 0) \cdot B \cdot e^{\lambda_1 t} + 0 \cdot (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t} = 0$. Hier staat nu $0 = 0$ en dat klopt (voor elke $A$ en $B$).
Dus alle functies van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda_1 t}$ zijn oplossing van de dv.

64 $\lambda = a + bi$ is oplossing van $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, dus
$(a+bi)^2 + p\cdot(a+bi) + q = 0$
$a^2 + 2abi - b^2 + pa + pbi + q = 0$
$2abi + pbi + a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$b(2a+p)i + a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$b \neq 0 \Rightarrow 2a + p = 0 \wedge a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$p = -2a \wedge a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$p = -2a \wedge a^2 - b^2 - 2a^2 + q = 0$
Dus $p = -2a$ en $q = a^2 + b^2$.

$\lambda = a - bi$ is oplossing van $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, dus
$(a-bi)^2 + p\cdot(a-bi) + q = 0$
$a^2 - 2abi - b^2 + pa - pbi + q = 0$
$-2abi - pbi + a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$-b(2a+p)i + a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$b \neq 0 \Rightarrow 2a + p = 0 \wedge a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$p = -2a \wedge a^2 - b^2 + pa + q = 0$
$p = -2a \wedge a^2 - b^2 - 2a^2 + q = 0$
Dus $p = -2a$ en $q = a^2 + b^2$.

$y(t) = \left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$ ......❶ geeft (gebruik de productregel en de kettingregel)
$y' = \left(A\cdot -\sin(bt)\cdot b + B\cdot\cos(bt)\cdot b\right)\cdot e^{at} + \left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)\cdot e^{at}\cdot a$
$= \left(-bA\sin(bt) + bB\cos(bt) + aA\cos(bt) + aB\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$ ......❷ en dit geeft weer
$y'' = \left(-bA\sin(bt) + bB\cos(bt) + aA\cos(bt) + aB\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$
$= \left(-b^2A\cos(bt) - b^2B\sin(bt) - abA\sin(bt) + abB\cos(bt)\right)\cdot e^{at}$
$+ \left(-bA\sin(bt) + bB\cos(bt) + aA\cos(bt) + aB\sin(bt)\right)\cdot e^{at}\cdot a$
$= \left(a^2A\cos(bt) - b^2A\cos(bt) + a^2B\sin(bt) - b^2B\sin(bt) + 2abB\cos(bt) - 2abA\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$ ...... ❸.

Nu ❶, ❷, ❸, $p = -2a$ en $q = a^2 + b^2$ invullen in $y'' + py' + qy = 0$ geeft
$\left(a^2A\cos(bt) - b^2A\cos(bt) + a^2B\sin(bt) - b^2B\sin(bt) + 2abB\cos(bt) - 2abA\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$
$-2a\cdot\left(-bA\sin(bt) + bB\cos(bt) + aA\cos(bt) + aB\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$
$+(a^2 + b^2)\cdot\left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)\cdot e^{at} = 0$ ($e^{\cdots} > 0 \Rightarrow e^{\cdots}$ delen)
$\cancel{a^2A\cos(bt)} \cancel{-b^2A\cos(bt)} + \cancel{a^2B\sin(bt)} - \cancel{b^2B\sin(bt)} + 2abB\cos(bt) - 2abA\sin(bt) + 2abA\sin(bt) - 2abB\cos(bt)$
$\cancel{-2a^2A\cos(bt)} - \cancel{2a^2B\sin(bt)} \cancel{+a^2A\cos(bt)} + \cancel{a^2B\sin(bt)} + \cancel{b^2A\cos(bt)} + \cancel{b^2B\sin(bt)} = 0$
Hier staat nu $0 = 0$ en dat klopt (voor elke $A$ en $B$).
Dus alle functies van de vorm $y(t) = \left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)\cdot e^{at}$ zijn oplossing van de dv.

65a Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda+4)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow$ reële oplossingen $\lambda = -4$ en $\lambda = -2$.
De algemene oplossing van de dv is $y(t) = A\cdot e^{-4t} + B\cdot e^{-2t}$.
$y = Ae^{-4t} + Be^{-2t}$ met $y(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$ (want $e^0 = 1$) en $y' = -4Ae^{-4t} - 2Be^{-2t}$ met $y'(0) = -1 \Rightarrow -4A - 2B = -1$.
$$\begin{cases} A + B = 1 \;\textbf{(1)} \\ -4A - 2B = -1 \;\textbf{(2)} \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 2B = 2 \;\textbf{(3)} \\ \underline{-4A - 2B = -1} \; + \;\textbf{(2)} \end{cases}$$
$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ in **(1)** $\Rightarrow -\frac{1}{2} + B = 1 \Rightarrow B = 1\frac{1}{2}$. Dus $y(t) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-4t} + 1\frac{1}{2}\cdot e^{-2t}$.

65b Karakteristieke vgl.: $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2 = i^2 \Rightarrow \lambda + 3 = \pm i \Rightarrow \lambda = -3 \pm i$. ($a = -3$ en $b = 1$)
De algemene oplossing van de dv is $y(t) = \left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\cdot e^{-3t}$.
$y = \left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\cdot e^{-3t}$ met $y(0) = 1 \Rightarrow (A\cdot 1 + B\cdot 0)\cdot 1 = 1$ (want $e^0 = 1,\ \cos(0) = 1,$ en $\sin(0) = 0$) $\Rightarrow A = 1$ en
$y' = \left(-A\sin(t) + B\cos(t)\right)\cdot e^{-3t} + \left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)\cdot -3e^{-3t}$ met $y'(0) = -1 \Rightarrow (B)\cdot 1 + (A)\cdot -3 = -1 \Rightarrow -3A + B = -1$.
$A = 1$ invullen in $-3A + B = -1 \Rightarrow -3 + B = -1 \Rightarrow B = 2$. De gevraagde oplossing is $y(t) = \left(\cos(t) + 2\sin(t)\right)\cdot e^{-3t}$.

65c Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow$ één reële oplossing $\lambda = 4$.
De algemene oplossing van de dv is $y(t) = \left(A + Bt\right)\cdot e^{4t}$.
$y = \left(A + Bt\right)\cdot e^{4t}$ met $y(0) = 1 \Rightarrow (A + B\cdot 0)\cdot 1 = 1$ (want $e^0 = 1$) $\Rightarrow A = 1$ en
$y' = B\cdot e^{4t} + \left(A + Bt\right)\cdot 4e^{4t}$ met $y'(0) = -1 \Rightarrow B\cdot 1 + (A + 0)\cdot 4 = -1 \Rightarrow 4A + B = -1$.
$A = 1$ invullen in $4A + B = -1 \Rightarrow 4 + B = -1 \Rightarrow B = -5$. De gevraagde oplossing is $y(t) = \left(1 - 5t\right)\cdot e^{4t}$.

65d Kar. vgl.: $\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}i^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}i$. ($a = 0$ en $b = \frac{1}{2}$)
De algemene oplossing van de dv is $y(t) = \left(A\cos(\frac{1}{2}t) + B\sin(\frac{1}{2}t)\right)\cdot e^{0t} = A\cos(\frac{1}{2}t) + B\sin(\frac{1}{2}t)$.
$y = A\cos(\frac{1}{2}t) + B\sin(\frac{1}{2}t)$ met $y(0) = 1 \Rightarrow A\cdot 1 + B\cdot 0 = 1$ (want $\cos(0) = 1,$ en $\sin(0) = 0$) $\Rightarrow A = 1$ en
$y' = -A\sin(\frac{1}{2}t)\cdot\frac{1}{2} + B\cos(\frac{1}{2}t)\cdot\frac{1}{2}$ met $y'(0) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}A\cdot 0 + \frac{1}{2}B\cdot 1 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}B = -1 \Rightarrow B = -2$.
De gevraagde oplossing is $y(t) = \cos(\frac{1}{2}t) - 2\sin(\frac{1}{2}t)$.

66a ($\frac{dy}{dt}=-x+y$ omschrijven tot) $x=-\frac{dy}{dt}+y$ geeft $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}+y\right)=-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}$.
Substitutie van $x=-\frac{dy}{dt}+y$ en $\frac{dx}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}$ in $\frac{dx}{dt}=2x-6y$ geeft
$-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=2\cdot\left(-\frac{dy}{dt}+y\right)-6y \Rightarrow -\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=-2\frac{dy}{dt}+2y+-6y \Rightarrow 0=\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}-4y$ (ofwel $y''-3y'-4=0$).

66b $\frac{dy}{dt}=-x+y$ met $x(0)=1$ en $y(0)=-1$ geeft $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=0}=-x(0)+y(0)=-1-1=-2$. Hier staat $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=0}=y'(0)=-2$.

66c De karakteristieke vergelijking van $y''-3y'-4=0$ is $\lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow (\lambda-4)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=4$ en $\lambda=-1$.
De algemene oplossing van de dv is $y(t)=A\cdot e^{4t}+B\cdot e^{-t}$.
$y=Ae^{4t}+Be^{-t}$ met $y(0)=-1 \Rightarrow A+B=-1$ (want $e^0=1$) en $y'=4Ae^{-4t}-Be^{-t}$ met $y'(0)=-2 \Rightarrow 4A-B=-2$.

$$\begin{cases} A+B=-1 & \textbf{(1)} \\ \underline{4A-B=-2} + & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$5A\quad=-3 \Rightarrow A=-\frac{3}{5}$ in **(1)** $\Rightarrow -\frac{3}{5}+B=-1 \Rightarrow B=-\frac{2}{5}$. Dus $\boxed{y(t)=-\frac{3}{5}\cdot e^{4t}-\frac{2}{5}\cdot e^{-t}}$

Nu is $x(t)=-\frac{dy}{dt}+y(t)$ met $y(t)=-\frac{3}{5}\cdot e^{4t}-\frac{2}{5}\cdot e^{-t}$ en $\frac{dy}{dt}=y'(t)=-\frac{12}{5}\cdot e^{4t}+\frac{2}{5}\cdot e^{-t}$.
Je vindt $x(t)=-\left(-\frac{12}{5}\cdot e^{4t}+\frac{2}{5}\cdot e^{-t}\right)+\left(-\frac{3}{5}\cdot e^{4t}-\frac{2}{5}\cdot e^{-t}\right)=\frac{9}{5}\cdot e^{4t}-\frac{4}{5}\cdot e^{-t}$. Dus $\boxed{x(t)=\frac{9}{5}\cdot e^{4t}-\frac{4}{5}\cdot e^{-t}}$

67a Als Jeroen het blokje loslaat dan gaat het naar boven $\Rightarrow F$ is naar boven gericht en dus positief (zie schaalverdeling).
Dus $F=-c\cdot u>0$ met uitrekking (zie schaalverdeling) $u=-1<0 \Rightarrow F=-c\cdot -1=2c>0 \Rightarrow c>0$.

67b $F=m\cdot a$ met $a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow F=m\cdot\frac{dv}{dt}$ ofwel $\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$. Verder is gegeven $F=-c\cdot u \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=\frac{-c\cdot u}{m}=-\frac{c}{m}\cdot u$.

67c $m=1$ en $c=1$ geeft $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{1}\cdot u=-u$. Verder is $v$ de snelheid waarmee $u$ verandert, dus $\frac{du}{dt}=v$.
Het blokje wordt naar beneden getrokken tot (de uitrekking) $u=-1$ en wordt losgelaten op tijdstip $t=0$.
Op het moment van loslaten, dus op $t=0$, geldt $u(0)=-1$ en $v(0)=0$.
Dus de beweging van het blokje wordt beschreven door het model $\frac{dv}{dt}=-u \wedge \frac{du}{dt}=v$ met $u(0)=-1$ en $v(0)=0$.

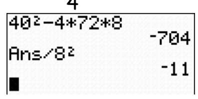
67d $\frac{du}{dt}=v$ geeft $\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$. Verder is gegeven $\frac{dv}{dt}=-u \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}=-u \Rightarrow$ dv: $\frac{d^2u}{dt^2}+u=0$ (ofwel $u''+u=0$).
De karakteristieke vergelijking van $u''+u=0$ is $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda^2=i^2 \Rightarrow \lambda=0\pm i$.
De algemene oplossing van de dv is $u(t)=\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)\cdot e^{-0t}=\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)\cdot 1=A\cos(t)+B\sin(t)$.
$u=A\cos(t)+B\sin(t)$ met $u(0)=-1 \Rightarrow A=-1$ en $u'=-A\sin(t)+B\cos(t)$ met $u'(0)=v(0)=0 \Rightarrow B=0$.
De gevraagde formule van $u$ is $u(t)=-\cos(t)$.

68a $F=-40\cdot\frac{du}{dt}-72\cdot u$ en $a=\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{F}{2}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2}=-20\frac{du}{dt}-36u \Rightarrow$ dv: $\frac{d^2u}{dt^2}+20\frac{du}{dt}+36u=0$ (ofwel $u''+20u'+36u=0$).
De karakteristieke vergelijking van $u''+20u'+36u=0$ is $\lambda^2+20\lambda+36=0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+18)=0 \Rightarrow \lambda=-2 \vee \lambda=-18$.
De algemene oplossing van de dv is $u(t)=A\cdot e^{-2t}+B\cdot e^{-18t}$ met $u(0)=1 \Rightarrow A+B=1$ (want $e^0=1$)
en $u'=-2Ae^{-2t}-18Be^{-18t}$ met $u'(0)=v(0)=2 \Rightarrow -2A-18B=2$.

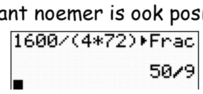
$$\begin{cases} A+\quad B=1\ \textbf{(1)} \\ -2A-18B=2\ \textbf{(2)} \end{cases}\left|\begin{matrix}\times 2\\ \times 1\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} 2A+\ 2B=2 & \textbf{(3)} \\ \underline{-2A-18B=2} + & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$-16B=4 \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$ in **(1)** $\Rightarrow A+-\frac{1}{4}=1 \Rightarrow A=1\frac{1}{4}$. Dus $u(t)=1\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-18t}$.

68b $c=72,\ k=40$ en $m=8$ geeft $D=\frac{40^2-4\cdot 72\cdot 8}{8^2}=-11<0 \Rightarrow$ onderdemping ofwel gedempte trilling.




68c Geen gedempte trilling $\Rightarrow D=\frac{40^2-4\cdot 72\cdot m}{m^2}\geq 0$ (met $m\neq 0$, er geldt zelfs $m>0 \Rightarrow$ teller $\geq 0$, want noemer is ook positief).
$40^2-4\cdot 72\cdot m\geq 0 \Rightarrow -4\cdot 72\cdot m\geq -1600 \Rightarrow 4\cdot 72\cdot m\leq 1600 \Rightarrow m\leq\frac{1600}{4\cdot 72}=\frac{400}{72}=\frac{50}{9}=5\frac{5}{9}$.




$m$ moet maximaal $5\frac{5}{9}$ kg zijn (opdat geen gedempte trilling ontstaat als het voorwerp uit de evenwichtsstand wordt gebracht).

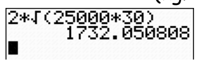
69a $F=-1000\cdot\frac{du}{dt}-500\cdot u$ en $a=\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{F}{1000}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{du}{dt}-\frac{1}{2}u \Rightarrow$ dv: $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}+\frac{1}{2}u=0$ (ofwel $u''+u'+\frac{1}{2}u=0$).
Karakt. vergelijking van $u''+u'+\frac{1}{2}u=0$ is $\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (\lambda+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (\lambda+\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}i^2 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$.
De oplossing van de dv is $u(t)=\left(A\cos(\frac{1}{2}t)+B\sin(\frac{1}{2}t)\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ met $u(0)=1 \Rightarrow A=1$ (want $e^0=1$) en
$u'=\left(-\frac{1}{2}A\sin(\frac{1}{2}t)+\frac{1}{2}B\cos(\frac{1}{2}t)\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}t}+\left(A\cos(\frac{1}{2}t)+B\sin(\frac{1}{2}t)\right)\cdot -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$ met $u'(0)=v(0)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}B+A\cdot -\frac{1}{2}=0$.
$A=1$ invullen in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A=0$ ofwel $\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}A$ ofwel $B=A \Rightarrow B=1$. Dus $u(t)=\left(\cos(\frac{1}{2}t)+\sin(\frac{1}{2}t)\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

69b Geen gedempte trilling $\Rightarrow D = \frac{k^2 - 4 \cdot 500 \cdot 1000}{1000^2} \geq 0$ ( $\Rightarrow$ teller $\geq 0$, want noemer is ook positief; verder geldt $k > 0$).
$k^2 - 4 \cdot 500 \cdot 1000 \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 4 \cdot 500 \cdot 1000 = 2\,000\,000 \Rightarrow |k| \geq \sqrt{2\,000\,000} = 1000 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow k \geq 1000 \cdot \sqrt{2}$.
$k$ moet minimaal $1000 \cdot \sqrt{2}$ zijn (opdat geen gedempte trilling ontstaat als het voorwerp uit de evenwichtsstand wordt losgelaten).

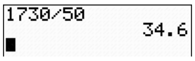
70a $F = 0 \cdot \frac{du}{dt} - c \cdot u$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{c}{m} \cdot u \Rightarrow$ dv: $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot u = 0$ (ofwel $u'' + \frac{c}{m} \cdot u = 0$).
De karakteristieke vergelijking van $u'' + \frac{c}{m} \cdot u = 0$ is $\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{c}{m} = \frac{c}{m} \cdot i^2 \Rightarrow \lambda = \pm i \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$ ($a = 0$ en $b = \sqrt{\frac{c}{m}}$).
De algemene oplossing van de dv is $u(t) = \left(A\cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right) + B\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right)\right) \cdot e^{0t} = A\cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right) + B\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right)$.
De periode van $u(t)$ is $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{m}{c}}}{\sqrt{\frac{m}{c}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$. Dus $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$.

70b $F = -k \cdot \frac{du}{dt} - c \cdot u$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{c}{m} \cdot u \Rightarrow$ dv: $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{c}{m} \cdot u = 0$ (ofwel $u'' + \frac{k}{m} \cdot u' + \frac{c}{m} \cdot u = 0$).
Karakt. vgl. van $u'' + \frac{k}{m} \cdot u' + \frac{c}{m} \cdot u = 0$ is $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$ ($m > 0,\ c > 0$ en $k > 0$).
Geen (gedempte) trilling $\Rightarrow D = \left(\frac{k}{m}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{c}{m} = \frac{k^2 - 4 \cdot c \cdot m}{m^2} \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4cm \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 4cm \Rightarrow k \geq \sqrt{4cm} = 2 \cdot \sqrt{cm}$.

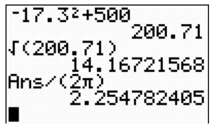
71a Kritische demping $\Rightarrow D = \frac{k^2 - 4cm}{m^2} = 0 \Rightarrow k^2 - 4cm = 0 \Rightarrow k^2 = 4cm$ ($k > 0$) $\Rightarrow k = 2 \cdot \sqrt{cm} = 2\sqrt{25\,000 \cdot 30} \approx 1730$ (kg/s).




71b $F = -1730 \cdot \frac{du}{dt} - 25\,000u$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{50}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -34{,}6\frac{du}{dt} - 500u$.




De dv is $\frac{d^2u}{dt^2} + 34{,}6\frac{du}{dt} + 500u = 0$ (ofwel $u'' + 34{,}6u' + 5000u = 0$) met karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 34{,}6\lambda + 500 = 0$.
$\lambda^2 + 34{,}6\lambda + 500 = (\lambda + 17{,}3)^2 - 17{,}3^2 + 500 = 0 \Rightarrow (\lambda + 17{,}3)^2 = 200{,}71i^2 \Rightarrow \lambda = -17{,}3 \pm i\sqrt{200{,}71} \approx -17{,}3 \pm 14{,}167i$.
De algemene oplossing van de dv is $u(t) = \left(A\cos(14{,}167t) + B\sin(14{,}167t)\right) \cdot e^{-17{,}3t}$.
De eigenfrequentie (trillingen/sec) van het veersysteem is ongeveer $\frac{14{,}167}{2\pi} \approx 2{,}3$ Hz.

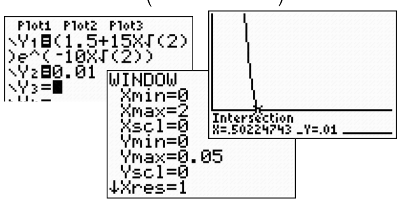



71c 70 omwentelingen per minuut zijn $\frac{70}{60} = \frac{7}{6} \approx 1{,}167$ omwentelingen per seconde.
Het veersysteem krijgt dus ongeveer 2,34 keer per sec. een trap naar beneden waardoor resonantie kan ontstaan.

72a $D = \frac{k^2 - 4cm}{m^2} = 0 \Rightarrow k^2 - 4cm = 0 \Rightarrow k^2 = 4cm$ ($k > 0$) $\Rightarrow k = 2 \cdot \sqrt{cm} = 2 \cdot \sqrt{200\,000 \cdot 1000} = 20\,000 \cdot \sqrt{2}$.

72b $F = -20\,000\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} - 200\,000u$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{1000}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -20\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} - 200u$.
De dv is $\frac{d^2u}{dt^2} + 20\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} + 200u = 0$ (ofwel $u'' + 20\sqrt{2} \cdot u' + 200u = 0$).
De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 20\sqrt{2} \cdot \lambda + 200 = 0$ met $D = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-20\sqrt{2} \pm 0}{2} = -10\sqrt{2}$.
De oplossing van de vorm $u(t) = (A + Bt) \cdot e^{-10t\sqrt{2}}$ met $u(0)$ (de maximale terugloop) $= 1{,}5 \Rightarrow A = 1{,}5$ (want $e^0 = 1$) en
$u' = B \cdot e^{-10t\sqrt{2}} + (A + Bt) \cdot -10\sqrt{2} \cdot e^{-10t\sqrt{2}}$ met $u'(0) = v(0) = 0$ (bij een extreem is $v = 0$) $\Rightarrow B - 10\sqrt{2} \cdot A = 0$.
$A = 1{,}5$ invullen in $B - 10\sqrt{2} \cdot A = 0$ geeft $B - 15\sqrt{2} = 0 \Rightarrow B = 15\sqrt{2}$. Dus $u(t) = \left(1{,}5 + 15t\sqrt{2}\right) \cdot e^{-10t\sqrt{2}}$.

72c $u(t) = \left(1{,}5 + 15t\sqrt{2}\right) \cdot e^{-10t\sqrt{2}} = 0{,}01$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 0{,}502$.
Dus na (ongeveer) een halve seconde is de uitwijking minder dan 1 cm.



## Diagnostische toets

**D1a** $\frac{dT}{dt} = c(T-18)$ met $T$ in °C en $t$ in minuten.

De gemiddelde snelheid (waarmee $T$ verandert) op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(2)-T(0)}{2-0} = \frac{60-70}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ (°C/minuut).

De snelheid (waarmee $T$ verandert) op $t = 1$ is (neem hiervoor de gemiddelde snelheid op $[0, 2]$) $\frac{dT}{dt} \approx -5$ (°C/minuut).

De temperatuur $T$ op $t = 1$ is (neem hiervoor de gemiddelde temperatuur op $[0, 2]$) $T \approx \frac{T(2)+T(0)}{2} = \frac{60+70}{2} = 65$ (°C).

$\frac{dT}{dt} = c(T-18)$ met $T$ in °C en $t$ in minuten geeft dan $-5 \approx c(65-18) \Rightarrow -5 \approx c \cdot 47 \Rightarrow c \approx \frac{-5}{47} \approx -0{,}106$.

```
-5/47
      -.1063829787
```

**D1b** $\frac{dT}{dt} = c(T-18)$ met $T$ in °C en $t$ in seconden.

De gemiddelde snelheid (waarmee $T$ verandert) op $[0, 120]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(120)-T(0)}{120-0} = \frac{60-70}{120} = \frac{-10}{120} = -\frac{1}{12}$ (°C/sec).

De snelheid (waarmee $T$ verandert) op $t = 60$ is (neem hiervoor de gemiddelde snelheid op $[0, 120]$) $\frac{dT}{dt} \approx -\frac{1}{12}$ (°C/sec).

De temperatuur $T$ op $t = 60$ is (neem hiervoor de gemiddelde temperatuur op $[0, 120]$) $T \approx \frac{T(120)+T(0)}{2} = \frac{60+70}{2} = 65$ (°C).

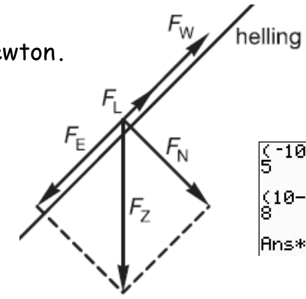
$\frac{dT}{dt} = c(T-18)$ met $T$ in °C en $t$ in seconden geeft dan $-\frac{1}{12} \approx c(65-18) \Rightarrow -\frac{1}{12} \approx c \cdot 47 \Rightarrow c \approx \frac{-\frac{1}{12}}{47} \approx -0{,}001776$.

```
-1/12/47
      -.0017730496
```

**D2a** $F_L$ is de luchtweerstand in Newton en $F_W$ is de wrijvingskracht in Newton.

Dit resulterende kracht $F_R = F_E - F_L - F_W = 755 - 0{,}4v^2 - 10v$ (N).

$\frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m} = \frac{-0{,}4v^2 - 10v + 755}{110}$ met $v$ in m/s en $t$ in seconden.

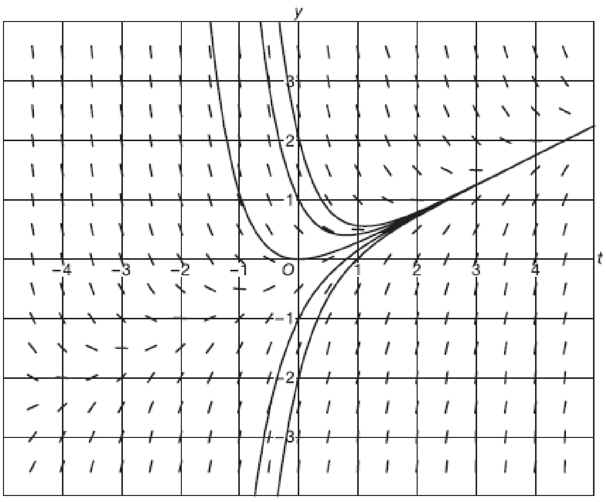



**D2b** $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-0{,}4v^2 - 10v + 755}{110} = 0$ (teller = 0 of intersect) $\Rightarrow v \approx 32{,}71$ (m/s).

De grenswaarde van zijn snelheid is ongeveer 32,71 m/s ≈ 118 km/u.

```
(-10)²-4*-0.4*75
5
              1308
(10-√(1308))/-0.
8
        32.7078533
Ans*3.6
```

**D3a** Zie hiernaast.




**D3b** Stel $k$: $y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{A(-1,-2)} = -1 - 2 \cdot -2 = -1 + 4 = 3$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 3t + b \\ \text{door } A(-1,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 = 3 \cdot -1 + b \Rightarrow -2 + 3 = b \Rightarrow b = 1$.

Dus de raaklijn in $A(-1,\ -2)$ is $k$: $y = 3t + 1$.

**D3c** $\frac{dy}{dt} = -1$ geeft $-1 = t - 2y$ ofwel $t - 2y = -1$.

$y = -t + 5$ geeft $t + y = 5$.

$\begin{cases} t - 2y = -1 & \textbf{(1)} \\ t + \ y = \ 5 & \textbf{(2)} \end{cases}$ −

$-3y = -6 \Rightarrow y = 2$ in **(1)** $\Rightarrow t - 4 = -1 \Rightarrow t = 3$. Dus $B(3, 2)$.

**D3d** $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $0 = t - 2y$ ofwel $2y = t$ ofwel $y = \frac{1}{2}t$.

De kromme met vergelijking $y = \frac{1}{2}t$ (dus rechte lijn) gaat door de toppen van de oplossingskrommen.

**D4a** $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft

$f_6(y) = 0$

$-y^2 - 5y + 6 = 0$

$y^2 + 5y - 6 = 0$

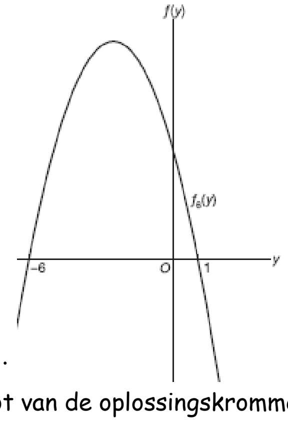
$(y+6)(y-1) = 0$

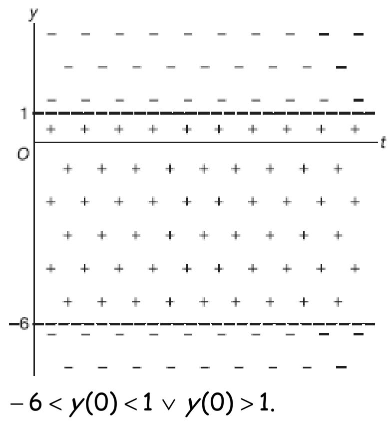
$y = -6 \vee y = 1$ (als kandidaat-asymptoten).

In de schets van $\frac{dy}{dt} = f_6(y)$ zie je dat

$\frac{dy}{dt} = f_6(y) > 0$ (boven de $y$-as) voor $-6 < y < 1$.

Maak dan het lijnelementenveld dat hoort bij $\frac{dy}{dt}$.



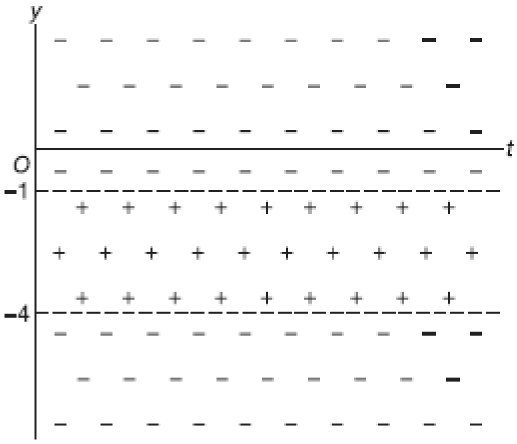




Lees erin af: de lijn $y = 1$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $-6 < y(0) < 1 \vee y(0) > 1$.

**D4b** De oplossingskrommen zijn dalend als $\frac{dy}{dt} = f_p(y) < 0$ voor elke waarde van $y$.

Hieruit volgt dat voor de discriminant van $-y^2 - 5y + p$ geldt $D < 0$.

$D = b^2 - 4ac = 25 + 4p < 0 \Rightarrow 4p < -25 \Rightarrow p < -\frac{25}{4}$. Dus voor $p < -\frac{25}{4}$ zijn alle oplossingskromen dalend.




**D4c** $\frac{dy}{dt} = f_p(y) = 0$ voor $y = -1$ geeft $-1 + 5 + p = 0 \Rightarrow p = -4$.
$f_{-4}(y) = 0$ geeft
$-y^2 - 5y - 4 = 0$
$y^2 + 5y + 4 = 0$
$(y+4)(y+1) = 0$
$y = -4 \vee y = -1$ (als kandidaat-asymptoten).
Maak nu het lijnenelementenveld en lees er in af:
de lijn $y = -1$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $-4 < y(0) < -1 \vee y(0) > -1$ als $p = -4$.

**D4d** $a = 3 = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{A(-1,-1)} = -1 + 5 + p = p + 4 \Rightarrow p = 3 - 4 = -1$.
Voor $p = -1$ raakt de oplossingskromme aan $l$: $y = 3t + 2$ in $A(-1,\ -1)$.

**D5a** Stel $y = at + b$ met $\frac{dy}{dt} = a$ is een oplossing van de dv $\frac{dy}{dt} = -2t + y - 1$.
$y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ invullen in $\frac{dy}{dt} = -2t + y - 1$ geeft
$a = -2t + at + b - 1$
$a = (-2 + a)t + b - 1$ (moet kloppen voor elke $t$)
$a = b - 1 \wedge -2 + a = 0 \Rightarrow a = b - 1 \wedge a = 2 \Rightarrow b = 3 \wedge a = 2$. De lineaire functie $y = 2t + 3$ is een oplossing van de dv

**D5b** De cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ heeft als vergelijking: $(t+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$.
De cirkel gaat door $P(2, 4) \Rightarrow (4+1)^2 + (2-3)^2 = r^2 \Rightarrow 3^2 + (-1)^2 = r^2 \Rightarrow 10 = r^2$.
De vergelijking van de cirkel is $(t+1)^2 + (y-3)^2 = 10$.
$(t+1)^2 + (y-3)^2 = 10$ geeft $d\left((t+1)^2 + (y-3)^2\right) = d(10)$
$2(t+1)dt + 2(y-3)dy = 0 \Rightarrow 2(y-3)dy = -2(t+1)dt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2(t+1)}{2(y-3)} = \frac{-(t+1)}{y-3} = \frac{t+1}{-(y-3)} = \frac{t+1}{3-y}$.
dus de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ die door het punt $P(2, 4)$ gaat is oplossingskromme van de dv $\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{3-y}$.

**D6a** $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ met $y > 0$ (de variabelen scheiden geeft)
$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{t}dt$ (primitiveren geeft)
$d(\ln(y)) = d(\ln(t))$
$\ln(y) = \ln(t) + c_1$ (de $e$-macht nemen geeft)
$y = e^{\ln(t)+c_1} = e^{\ln(t)} \cdot e^{c_1} = t \cdot e^{c_1} = e^{c_1} \cdot t$.
De algemene oplossing is $y = c \cdot t$ (met $c > 0$). (rechte lijnen).

**D6b** $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$ (de variabelen scheiden geeft)
$y dy = t dt$ (primitiveren geeft)
$d\left(\frac{1}{2}y^2\right) = d\left(\frac{1}{2}t^2\right)$
$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + c_1$ (vermenigvuldigen met 2)
$y^2 = t^2 + c$.
De algemene oplossing is $y^2 - t^2 = c$ (hyperbolen).

**D6c** $\frac{dy}{dt} = y - ty = y(1-t)$ met $y > 0$ (de variabelen scheiden geeft)
$\frac{1}{y}dy = (1-t)dt$ (primitiveren geeft) $\Rightarrow d(\ln(y)) = d\left(t - \frac{1}{2}t^2\right) \Rightarrow \ln(y) = t - \frac{1}{2}t^2 + c_1$ ($e$-macht nemen geeft).
De algemene oplossing is $y = e^{t - \frac{1}{2}t^2 + c_1} = e^{t-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{c_1} = e^{c_1} \cdot e^{t-\frac{1}{2}t^2} = c \cdot e^{t-\frac{1}{2}t^2}$ (met $c > 0$).

**D6d** $\frac{dy}{dt} = \frac{t+3}{2-2y}$ (de variabelen scheiden geeft) $\Rightarrow (2-2y)dy = (t+3)dt$ (primitiveren geeft) $\Rightarrow d\left(2y - y^2\right) = d\left(\frac{1}{2}t^2 + 3t\right)$.
De algemene oplossing is $2y - y^2 = \frac{1}{2}t^2 + 3t + c_1$.

**D7a** Stel $y = at + b$ is een oplossing van de dv.
$y = at + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = y + t + 1$ geeft
$a = at + b + t + 1$
$a = (a+1)t + b + 1$ (voor elke $t$)
$a + 1 = 0 \wedge a = b + 1$
$a = -1 \wedge b = a - 1 = -1 - 1 = -2$.
Dus $y(t) = -t - 2$ is een particuliere oplossing.
Homogene deel $\frac{dy}{dt} = y$ geeft $y(t) = c \cdot e^t$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^t - t - 2$.

**D7b** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing van de dv.
$y = A \cdot e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ subst. in $\frac{dy}{dt} = -3y - 2e^t$ geeft
$A \cdot e^t = -3 \cdot A \cdot e^t - 2e^t$
$A \cdot e^t = (-3A - 2) \cdot e^t$ (voor elke $t$)
$A = -3A - 2 \Rightarrow 4A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$.
Dus $y(t) = -\frac{1}{2}e^t$ is een particuliere oplossing.
Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = -3y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{-3t}$.
De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$.

**D7c** Stel $y = A\sin(t) + B\cos(t)$ is een oplossing van de dv.

$y = A\sin(t) + B\cos(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = A\cos(t) - B\sin(t)$ invullen in $\frac{dy}{dt} = y + \sin(t) + 4\cos(t)$ geeft

$A\cos(t) - B\sin(t) = A\sin(t) + B\cos(t) + \sin(t) + 4\cos(t)$

$A\cos(t) - B\sin(t) = (A+1)\sin(t) + (B+4)\cos(t)$ (voor elke $t$) $\quad$ $A$ en $B$ ⇨

$A = B + 4 \wedge -B = A + 1$
$A = B + 4 \wedge -B = B + 4 + 1$
$A = B + 4 \wedge -2B = 5$
$A = B + 4 \wedge B = -2\frac{1}{2}$
$A = -2\frac{1}{2} + 4 = 1\frac{1}{2} \wedge B = -2\frac{1}{2}$.

Dus $y(t) = 1\frac{1}{2}\sin(t) - 2\frac{1}{2}\cos(t)$ is een particuliere oplossing.

Het homogene deel $\frac{dy}{dt} = y$ geeft $y(t) = c \cdot e^{t}$.

De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{t} + 1\frac{1}{2}\sin(t) - 2\frac{1}{2}\cos(t)$.

**D7d** Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ in $\frac{dy}{dt} = -y(2-y) = -2y + y^2$ geeft

$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = -2 \cdot \frac{1}{u} + \left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = 2u - 1$.

$u(t) = \frac{1}{2}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} = 2u - 1$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = 2u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{2t}$.

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 2u - 1$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{2t} + \frac{1}{2}$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{t} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2c_1 \cdot e^{t} + 1} = \frac{2}{1 + c \cdot e^{t}}$. De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = -y(2-y)$ is $y(t) == \frac{2}{1 + c \cdot e^{t}}$.

**D8** Substitutie van $N = \frac{1}{u}$ 1n $\frac{dN}{dt} = N \cdot (1 - \frac{N}{665}) = N - \frac{1}{665} \cdot N^2$ geeft

$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \frac{1}{u} - \frac{1}{665} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} - \frac{1}{665u^2}$ (verm. met $-u^2$) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -u + \frac{1}{665}$.

$u(t) = \frac{1}{665}$ een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -u + \frac{1}{665}$ en het homogene deel $\frac{du}{dt} = -u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{-t}$.

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -u + \frac{1}{665}$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{-t} + \frac{1}{665}$.

$N = \frac{1}{u}$ geeft $N(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{-t} + \frac{1}{665}} = \frac{665}{665c_1 \cdot e^{-t} + 1} \Rightarrow$ de algemene oplossing van $\frac{dN}{dt} = N \cdot (1 - \frac{N}{665})$ is $N(t) = \frac{665}{1 + c \cdot e^{-t}}$.

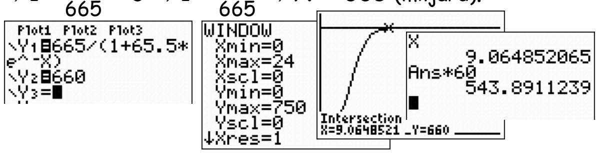
$N(t) = \frac{665}{1 + c \cdot e^{-t}}$ met $N(0) = 10 \Rightarrow 10 = \frac{665}{1 + c \cdot e^{0}} \Rightarrow 10 = \frac{665}{1 + c} \Rightarrow 1 + c = \frac{665}{10} = 66{,}5 \Rightarrow c = 65{,}5$.

Dus de algemene oplossing van de dv bij de groei van het aantal gistcellen is $N(t) = \frac{665}{1 + 65{,}5 \cdot e^{-t}}$ (in miljarden).

De grenswaarde van $N(t) = \frac{665}{1 + 66{,}5 \cdot e^{-t}}$ bereken je met $\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{N}{665} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{N}{665} \Rightarrow N = 665$ (miljard).

$N(t) = \frac{665}{1 + 66{,}5 \cdot e^{-t}} = 665 - 5$ (intersect of algebraïsch) $\Rightarrow t \approx 9{,}06...$

Dus na $t \approx 9{,}06...$ uur dat is na (ongeveer) 545 minuten verschilt $N$ voor het eerst minder dan vijf van de grenswaarde.




**D9a** Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda + 5)^2 = 0 \Rightarrow$ één reële oplossing $\lambda = -5$.

De algemene oplossing van de dv is $y(t) = \left(A + Bt\right) \cdot e^{-5t}$.

$y = \left(A + Bt\right) \cdot e^{-5t}$ met $y(0) = -2 \Rightarrow (A + B \cdot 0) \cdot 1 = -2$ (want $e^0 = 1$) $\Rightarrow A = -2$ en

$y' = B \cdot e^{-5t} + \left(A + Bt\right) \cdot -5e^{-5t}$ met $y'(0) = 3 \Rightarrow B \cdot 1 + (A + 0) \cdot -5 = 3 \Rightarrow -5A + B = 3$.

$A = -2$ invullen in $-5A + B = 3 \Rightarrow 10 + B = 3 \Rightarrow B = -7$. $\quad$ De gevraagde oplossing is $y(t) = \left(-2 - 7t\right) \cdot e^{-5t}$.

**D9b** Karakteristieke vgl.: $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 - 4 + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 4i^2 \Rightarrow \lambda - 2 = \pm 2i \Rightarrow \lambda = 2 \pm 2i$. ($a = 2$ en $b = 2$)

De algemene oplossing van de dv is $y(t) = \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \cdot e^{2t}$.

$y = \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \cdot e^{2t}$ met $y(0) = -2 \Rightarrow (A \cdot 1 + B \cdot 0) \cdot 1 = -2$ (want $e^0 = 1$, $\cos(0) = 1$, en $\sin(0) = 0$) $\Rightarrow A = -2$ en

$y' = \left(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)\right) \cdot e^{2t} + \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \cdot 2e^{2t}$ met $y'(0) = 3 \Rightarrow (2B) \cdot 1 + (A) \cdot 2 = 3 \Rightarrow 2A + 2B = 3$.

$A = -2$ invullen in $2A + 2B = 3 \Rightarrow -4 + 2B = 3 \Rightarrow 2B = 7 \Rightarrow B = 3\frac{1}{2}$. De gevr. opl. is $y(t) = \left(-2\cos(2t) + 3\frac{1}{2}\sin(2t)\right) \cdot e^{2t}$.

**D9c** Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 6)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$ reële oplossingen $\lambda = -6$ en $\lambda = 1$.

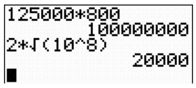
De algemene oplossing van de dv is $y(t) = A \cdot e^{-6t} + B \cdot e^{t}$.

$y = Ae^{-6t} + Be^{t}$ met $y(0) = -2 \Rightarrow A + B = 1$ (want $e^0 = 1$) en $y' = -6Ae^{-6t} + Be^{t}$ met $y'(0) = 3 \Rightarrow -6A + B = 3$.

$$\begin{cases} A + B = -2 & \textbf{(1)} \\ -6A + B = 3 & \textbf{(2)} \end{cases} \; -$$

$7A = -5 \Rightarrow A = -\frac{5}{7}$ in **(1)** $\Rightarrow -\frac{5}{7} + B = -2 \Rightarrow B = -1\frac{2}{7}$. $\quad$ Dus $y(t) = -\frac{5}{7} \cdot e^{-6t} - 1\frac{2}{7} \cdot e^{t}$.

D10a $D = \frac{k^2 - 4cm}{m^2} = 0 \Rightarrow k^2 - 4cm = 0 \Rightarrow k^2 = 4cm$ $(k > 0) \Rightarrow k = 2 \cdot \sqrt{cm} = 2 \cdot \sqrt{125\,000 \cdot 800} = 20\,000.$




D10b $F = -20\,000 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 125\,000u$ en $a = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{800}$ geeft $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -25 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{1250}{8}u.$

De dv is $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 25 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1250}{8}u = 0$ (ofwel $u'' + 25 \cdot u' + \frac{1250}{8}u = 0$).

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 25 \cdot \lambda + \frac{1250}{8} = 0$ met $D = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-25 \pm 0}{2} = -12\frac{1}{2}.$

De oplossing van de vorm $u(t) = (A + Bt) \cdot e^{-12\frac{1}{2}t}$ met $u(0)$ (de maximale terugloop) $= 1 \Rightarrow A = 1$ (want $e^0 = 1$) en

$u' = B \cdot e^{-12\frac{1}{2}t} + (A + Bt) \cdot -12\frac{1}{2} \cdot e^{-12\frac{1}{2}t}$ met $u'(0) = v(0) = 0$ (bij een extreem is $v = 0$) $\Rightarrow B - 12\frac{1}{2} \cdot A = 0.$

$A = 1$ invullen in $B - 12\frac{1}{2} \cdot A = 0$ geeft $B - 12\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow B = 12\frac{1}{2}.$ Dus $u(t) = \left(1 + 12\frac{1}{2}t\right) \cdot e^{-12\frac{1}{2}t}.$

D10c $u(t) = \left(1 + 12\frac{1}{2}t\right) \cdot e^{-12\frac{1}{2}t} = 0{,}10$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 0{,}311.$

Dus na (ongeveer) 0,3 seconde is de uitwijking minder dan 10 cm.